2021학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ②	02. ④	03. ⑤	04. ②	05. ③
06. ①	07. ⑤	08. ③	09. ④	10. ④
11. ①	12. ⑤	13. ④	14. ③	15. ③
16. ⑤	17. ③	18. ②	19. ②	20. ①
21. ②	22. 24	23. 2	24. 12	25. 242
26. 121	27. 9	28. 23	29. 168	30. 43

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^1=2$$

정답 ②

2. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+4n+1)-(4n^2-4n+1)}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{2+\frac{5}{n}}$$

$$=\frac{8}{2+0}=4$$

정답 ④

3. 출제의도 : 확률의 기본 성질을 이용하여 조건부확률의 값을 구할 수 있는가?

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}-\frac{9}{10}=\frac{3}{10}$$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$$

정답 ⑤

4. 출제의도 : 급수의 정의를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

정답 ②

5. 출제의도 : 확률밀도함수의 그래프를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
확률밀도함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로
$\mathrm{P}(2 \leq X \leq 4)=\mathrm{P}(4 \leq X \leq 6)$
$\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2)=\mathrm{P}(6 \leq X \leq 8)$
이때, $\mathrm{P}(2 \leq X \leq 4)=a$, $\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2)=b$로 놓으면
문제의 조건에서
$3a=4b$ …… ㉠
확률의 총합이 1이므로
$2(a+b)=1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $a+\frac{3}{4}a=\frac{1}{2}$, $a=\frac{2}{7}$
따라서
$\mathrm{P}(2 \leq X \leq 6)$
$=\mathrm{P}(2 \leq X \leq 4)+\mathrm{P}(4 \leq X \leq 6)$
$=2a$
$=2\times\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

정답 ③

6. 출제의도 : 부분적분법을 이용하여 여러 가지 함수의 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\int_1^2 (x-1)e^{-x}dx$
$=\left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^2-\int_1^2(-e^{-x})dx$
$=-e^{-2}+\int_1^2 e^{-x}dx$
$=-e^{-2}+\left[-e^{-x}\right]_1^2$
$=-e^{-2}-e^{-2}+e^{-1}$
$=\frac{1}{e}-\frac{2}{e^2}$

정답 ①

7. 출제의도 : 매개변수로 나타내어진 함수를 미분하여 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$x=\ln t+t$, $y=-t^3+3t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$
$$=\frac{-3t^2+3}{\frac{1}{t}+1}$$
$$=\frac{-3t(t+1)(t-1)}{t+1}$$
$$=-3t(t-1)$$

이때, $f(t)=-3t(t-1)$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프는 $t=\frac{1}{2}$에서 대칭이고 최고차항의 계수가 음수이므로 $t=\frac{1}{2}$에서 최댓값을 갖는다.
따라서
$a=\frac{1}{2}$

정답 ⑤

8. **출제의도** : 등비수열의 극한의 성질을 이용하여 등비급수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\{a_n\}$이 등비수열이므로

$a_n = a \times r^n$으로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a\times r^n+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a\times\left(\frac{r}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a\times\left(\frac{r}{3}\right)^n=\frac{1}{6}$이어야 한다.

즉, $a=\frac{1}{6}$, $r=3$

따라서 $a_n=\frac{1}{6}\times 3^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

정답 ③

9. **출제의도** : 원순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
8명의 학생 중에서 A, B를 제외한 6명 중 3명을 택하는 경우의 수는

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

이 각각에 대하여 A와 B가 이웃하도록 5명의 학생을 원 모양의 탁자에 둘러앉히는 경우의 수는
$(4-1)!\times 2!=12$
따라서 구하는 경우의 수는
$20\times12=240$

정답 ④

10. **출제의도** : 점화식으로 나타내어진 수열을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$
에서
$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$
이때, $a_1=12$이므로
$a_2=-a_1+1=-11$
$a_3=-a_2-2=9$
$a_4=-a_3+3=-6$
$a_5=-a_4-4=2$
$a_6=-a_5+5=3$
$a_7=-a_6-6=-9$
$a_8=-a_7+7=16$
따라서, $a_k>a_1$을 만족시키는 k의 최솟값은 8이다.

정답 ④

11. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$a>1$, $b>1$, $c>1$이므로

$\log_a b > 0$, $\log_b c > 0$, $\log_c a > 0$

양수 t에 대하여

$$\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4} = t$$

로 놓으면

$\log_a b = t$, $\log_b c = 2t$, $\log_c a = 4t$

이때 $\log_a b \times \log_b c \times \log_c a = 1$이므로

$t \times 2t \times 4t = 1$에서 $t = \frac{1}{2}$

따라서

$$\begin{aligned}\log_a b + \log_b c + \log_c a &= t + 2t + 4t \\ &= 7t \\ &= 7 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

정답 ①

12. **출제의도** : 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 6^2 - \sqrt{15}^{\,2}}{2 \times 6 \times 6} = \frac{57}{72}$$

이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^{\,2} &= \overline{AB}^{\,2} + \overline{CA}^{\,2} - 2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A \\ &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{57}{72} \\ &= 36 + 100 - 95 = 41\end{aligned}$$

따라서

$\overline{BC} = \sqrt{41}$

정답 ⑤

13. **출제의도** : 지수함수와 관련된 문제를 지수방정식 등을 이용하여 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B가 직선 $y = x$위에 있으므로

$A(p,\ p)$, $B(q,\ q)$ $(p < q)$로 놓으면

$\overline{AB} = 6\sqrt{2}$

이므로

$\sqrt{(q-p)^2 + (q-p)^2} = 6\sqrt{2}$

$q - p = 6$ -----㉠

또, 사각형 ACDB의 넓이가 30이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times (\overline{AC} + \overline{DB}) = 30$

$\frac{1}{2} \times (q-p) \times (p+q) = 30$

$\frac{1}{2} \times 6 \times (p+q) = 30$

$p + q = 10$ ----㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$p = 2$, $q = 8$

두 점 A, B가 곡선 $y = 2^{ax+b}$위에 있으므로

$2^{2a+b} = 2$ ----㉢

$2^{8a+b} = 8$ ----㉣

㉣를 ㉢으로 변끼리 나누면

$2^{6a} = 4$

$2^{6a} = 2^2$

$6a = 2$

$a = \frac{1}{3}$

이 값을 ㉢에 대입하면

$$2^{\frac{2}{3}+b}=2$$

$$\frac{2}{3}+b=1$$

$$b=\frac{1}{3}$$

따라서,

$$a+b=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

정답 ④

14. 출제의도 : 표본평균의 분포와 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따른다고 하면

$\mathrm{P}(X\geq 3.4)=\frac{1}{2}$이므로 $m=3.4$

또, $\mathrm{P}(Z\leq -1)=\mathrm{P}(Z\geq 1)$이므로

$\mathrm{P}(X\leq 3.9)+\mathrm{P}(Z\geq 1)=1$에서

$\mathrm{P}(X\geq 3.9)=\mathrm{P}(Z\geq 1)$

$$\mathrm{P}(X\geq 3.9)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{0.5}{\sigma}\right)$$

이므로 $\frac{0.5}{\sigma}=1$, $\sigma=0.5$

따라서 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\,0.5^2)$을 따르므로

확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(3.4,\,0.1^2)$을 따른다.

$$\text{즉 } \mathrm{P}(\overline{X}\geq 3.55)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{3.55-3.4}{0.1}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$$
$$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$$
$$=0.5-0.4332$$
$$=0.0668$$

정답 ③

15. 출제의도 : 합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}=b$$

에서 $x\to -2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

$$\lim_{x\to -2}g(x)=0$$

즉, $g(-2)=0$이고 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$f(0)=-2$

이때

$$f(0)=\ln\left(\frac{\sec 0+\tan 0}{a}\right)=\ln\left(\frac{1+0}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}$$

이므로

$$\ln\frac{1}{a}=-2$$

에서 $\frac{1}{a}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$, 즉 $a=e^2$

또,

$$b=\lim_{x\to -2}\frac{g(x)}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}=g'(-2)$$

한편

$$f(x)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{a}\right)=\ln\left(\frac{\sec x+\tan x}{e^2}\right)$$

에서

$$f'(x)=\frac{e^2}{\sec x+\tan x}\times\frac{\sec x\tan x+\sec^2 x}{e^2}$$
$$=\sec x$$

이므로

$$g'(-2)=\frac{1}{f'(g(-2))}$$
$$=\frac{1}{f'(0)}$$
$$=\frac{1}{\sec 0}$$
$$=1$$

따라서 $a=e^2$, $b=1$이므로

$ab=e^2\times 1=e^2$

정답 ③

16. **출제의도** : 도형에 활용된 등차수열에 관련된 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

이고 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$a_n : \sqrt{3a_n}=\sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$a_n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=3a_n$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{3}$

이다.

이때, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이므로

$$a_n=1+(n-1)\times 3$$
$$=3n-2$$

따라서, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times a_{n+1}\times\sqrt{3a_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{3n+1}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

따라서, $p=3$, $f(n)=3n+1$이므로

$p+f(8)=3+25=28$

정답 ⑤

17. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7개 동아리의 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는 7!

(i) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 경우

두 동아리 A, B를 같은 것으로 보고 순서를 정하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!}$

이 경우의 확률은

$\frac{\frac{7!}{2!}}{7!}=\frac{1}{2}$

(ii) 두 수학 동아리 사이에 과학 동아리 2개가 발표하는 경우

두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하고 순서를 정하는 경우의 수는

$2\times{}_5\mathrm{P}_2=40$

네 동아리를 하나로 묶어 전체 순서를 정하는 경우의 수는

$4!$

이 경우의 확률은

$\dfrac{40\times 4!}{7!}=\dfrac{4}{21}$

(ⅲ) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하고, 두 수학 동아리 사이에 과학 동아리 2개가 발표하는 경우

두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하고 순서를 정하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2=20$

네 동아리를 하나로 묶어 전체 순서를 정하는 경우의 수는

$4!$

이 경우의 확률은

$\dfrac{20\times 4!}{7!}=\dfrac{2}{21}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 확률의 덧셈정리에 의하여 구하는 확률은

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{21}-\dfrac{2}{21}=\dfrac{25}{42}$

정답 ③

18. **출제의도** : 치환적분법을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $x\le 0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이므로

$x\le 0$일 때,

$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$

$=\int_0^x 0\times f(1-t)dt$

$=\int_0^x 0\,dt=0$ (참)

ㄴ. $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt$

에서 $1-t=s$라 하면

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\int_1^{\frac{1}{2}} f(1-s)f(s)(-ds)$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(s)f(1-s)ds$

$=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)f(1-t)dt$

이므로

$g(1)=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt$

$=\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)f(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)f(1-t)dt$

$=g\left(\dfrac{1}{2}\right)+g\left(\dfrac{1}{2}\right)=2g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ (참)

ㄷ. $x\le 0$일 때 $g(x)=0$이고,

$x\ge 1$일 때

$g(x)=\int_0^x f(t)f(1-t)dt$

$=\int_0^1 f(t)f(1-t)dt+\int_1^x f(t)f(1-t)dt$

$=g(1)+0=g(1)$

한편, $0<x<1$일 때

$g'(x)=f(x)f(1-x)>0$

이므로 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 증가한다.

즉, $g(a)\le g(1)$이고

ㄴ에서 $g(1)=2g\left(\dfrac{1}{2}\right)$이므로

$g(a)\le 2g\left(\dfrac{1}{2}\right)$

이때 곡선 $y=f(x)f(1-x)$ 위의 점

$A\left(\frac{1}{2},\ \left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2\right)$에 대하여 선분 OA를 대각선으로 하고 각 변이 x축 또는 y축에 수직인 직사각형의 넓이를 S라 하면

$$2g\left(\frac{1}{2}\right) \le 2S$$

$$\le 2\times\frac{1}{2}\times\left\{f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}^2$$

$$\le (\ln 2)^{20} < 1$$

따라서 $g(a)\ge 1$을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ②

19. 출제의도 : 확률의 정의와 집합의 포함관계를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

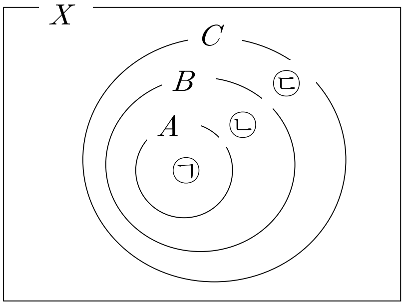
정답풀이 :

공집합이 아닌 서로 다른 15개의 집합에서 임의로 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는

$15\times 14\times 13$ -----㉠

이때, 세 부분집합이 A, B, C로 나열되었을 때, $A\subset B\subset C$를 만족시켜야 하므로 다음 그림과 같고 다음 세 조건을 만족시켜야 한다.

$A\ne\phi$이고 $B-A\ne\phi$이고 $C-B\ne\phi$



위에서 A, $B-A$, $C-B$를 각각 ㉠, ㉡, ㉢이라 하고 이 부분에 들어갈 원소의 개수로 경우를 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) ㉡ : 1개, ㉢ : 1개

1, 2, 3, 4 중 ㉡과 ㉢에 들어갈 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수는

4×3

이 각각에 대하여 ㉠에 2개가 들어가는 경우의 수는 1이고 ㉠에 1개가 들어가는 경우의 수는 2이므로 경우의 수는

3

그러므로 이 경우의 수는

$4\times 3\times 3$

(ⅱ) ㉡ : 1개, ㉢ : 2개

1, 2, 3, 4중 ㉡과 ㉢에 원소를 배정하는 경우의 수는

$4\times {}_3C_2 = 4\times 3$

나머지 원소 1개는 ㉠에 들어가야 하므로 경우의 수는

$4\times 3\times 1 = 4\times 3$

(ⅲ) ㉡ : 2개, ㉢ :1개

(ⅱ)와 같은 방법으로 하면 경우의 수는

4×3

따라서 구하는 사건을 E라 하면

$$P(E) = \frac{4\times 3\times 3 + 4\times 3\times 2}{15\times 14\times 13}$$

$$= \frac{4\times 3\times 5}{15\times 14\times 13}$$

$$= \frac{2}{7\times 13}$$

$$= \frac{2}{91}$$

정답 ②

20. 출제의도 : 치환적분법과 정적분으로 나타낸 함수의 미분을 이용하여 극대가 되는 x의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^x tf(x-t)dt$

에서 $x-t=s$라 하면

$$\int_0^x tf(x-t)dt = \int_x^0 (x-s)f(s)(-ds)$$
$$= \int_0^x (x-s)f(s)ds$$

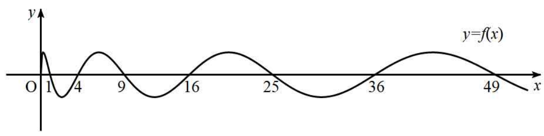
이므로

$$g(x) = x\int_0^x f(s)ds - \int_0^x sf(s)ds$$

이고,

$$g'(x) = \int_0^x f(s)ds + xf(x) - xf(x)$$
$$= \int_0^x f(s)ds$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$1^2 < a_1 < 2^2$,

$3^2 < a_2 < 4^2$,

$5^2 < a_3 < 6^2$,

$\vdots$

$11^2 < a_6 < 12^2$

이므로 $k=11$

정답 ①

21. 출제의도 : 삼각함수의 주기성을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$\sin k\alpha + 2 = 3\cos 12\alpha$

함수 $f(x)$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로

$x=\frac{\pi}{k}-\alpha$도 방정식 $\sin kx+2=\sin k\alpha+2$의 실근이다.

이때 조건을 만족시키려면 $x=\frac{\pi}{k}-\alpha$가 방정식 $3\cos 12x = 3\cos 12\alpha$의 실근이어야 한다.

$3\cos 12\left(\frac{\pi}{k}-\alpha\right) = 3\cos\left(\frac{12\pi}{k}-12\alpha\right)$에서

$3\cos\left(\frac{12\pi}{k}-12\alpha\right) = 3\cos 12\alpha$가 성립하려면

$\frac{12\pi}{k} = 2\pi,\ 4\pi,\ 6\pi,\ 8\pi,\ 10\pi,\ 12\pi,\ \cdots$

이어야 한다.

이때 k가 자연수이므로

$k=6,\ 3,\ 2,\ 1$

따라서 그 개수는 4이다.

정답 ②

22. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x+\frac{4}{x^2}\right)^6$의 일반항은

$${}_6\mathrm{C}_r \times x^{6-r} \times \left(\frac{4}{x^2}\right)^r$$

$= {}_6C_r \times 4^r \times x^{6-3r}$

x^3의 항은

$6-3r=3$에서 $r=1$일 때이다.

따라서 x^3의 계수는

${}_6C_1 \times 4^1 = 6 \times 4 = 24$

정답 24

23. **출제의도** : 여러 가지 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = x\ln(2x-1)$에서

$f'(x) = \ln(2x-1) + x \times \dfrac{2}{2x-1}$

따라서

$f'(1) = 0 + 1 \times 2 = 2$

정답 2

24. **출제의도** : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

방정식

$\log_2 x = 1 + \log_4(2x-3)$

에서 진수 조건에 의하여

$x > 0$, $2x-3 > 0$

즉, $x > \dfrac{3}{2}$ ……㉠

한편

$\log_2 x = 1 + \log_4(2x-3)$

에서

$\log_2 x = 1 + \dfrac{1}{2}\log_2(2x-3)$

$2\log_2 x = 2 + \log_2(2x-3)$

$\log_2 x^2 = \log_2 4 + \log_2(2x-3)$

$= \log_2 4(2x-3)$

이므로

$x^2 = 4(2x-3)$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x-2)(x-6) = 0$

$x = 2$ 또는 $x = 6$

이것은 모두 ㉠을 만족시키므로 구하는 모든 실수 x의 값의 곱은

$2 \times 6 = 12$

정답 12

25. **출제의도** : 정적분을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4$에서

$f(x) = x^4$, $x_k = 1 + \dfrac{2k}{n}$라 하면

$\Delta x = \dfrac{2}{n}$, $x_0 = 1$, $x_n = 3$

따라서

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4$

$\displaystyle= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$\displaystyle= \int_1^3 f(x)dx$

$\displaystyle= \int_1^3 x^4 dx$

$= \left[\dfrac{1}{5}x^5\right]_1^3$

$=\frac{1}{5}(3^5-1)$

$=\frac{242}{5}$

이므로

$5a=242$

정답 242

26. **출제의도** : 확률분포가 표로 주어진 이산확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=5-2^2=1$

이때, $Y=10X+1$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(10X+1)$

$=10\mathrm{E}(X)+1$

$=10\times2+1=21$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10X+1)$

$=100\mathrm{V}(X)$

$=100\times1=100$

따라서

$\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)=21+100=121$

정답 121

27. **출제의도** : 등비수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 자연수 n에 대하여

$S_{n+3}-S_n=13\times3^{n-1}$

이 성립하고

$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$

이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times3^{n-1}$ ……㉠

이 성립한다.

㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2+a_3+a_4=13$

이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=13$

$a_1r(1+r+r^2)=13$ ……㉡

또, ㉠에 $n=2$를 대입하면

$a_3+a_4+a_5=13\times3=39$

이므로

$a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4=39$

$a_1r^2(1+r+r^2)=39$ ……㉢

㉢÷㉡을 하면

$\frac{a_1r^2(1+r+r^2)}{a_1r(1+r+r^2)}=\frac{39}{13}$

에서 $r=3$

$r=3$을 ㉡에 대입하면

$a_1\times3\times(1+3+9)=13$

에서 $a_1=\frac{1}{3}$

따라서 $a_4=a_1r^3=\frac{1}{3}\times3^3=9$

정답 9

28. **출제의도** : 도형의 성질과 삼각함수를 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

중심각과 원주각의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{AOP}=\theta$이므로

$\angle ABP = \dfrac{\theta}{2}$

삼각형 OBR에서

$\angle BRO = \pi - \left(2\theta + \dfrac{\theta}{2}\right) = \pi - \dfrac{5\theta}{2}$이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OB}}{\sin\left(\pi - \dfrac{5\theta}{2}\right)} = \frac{\overline{OR}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

$\dfrac{1}{\sin\dfrac{5\theta}{2}} = \dfrac{\overline{OR}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}$에서 $\overline{OR} = \dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{5\theta}{2}}$

(i) 삼각형 POR에서

$\angle POR = \pi - 3\theta$이므로

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OR} \times \sin(\pi - 3\theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{5\theta}{2}} \times \sin 3\theta$$

$$= \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}\sin 3\theta}{2\sin\dfrac{5\theta}{2}}$$

(ii) $g(\theta)$는 부채꼴 QOB의 넓이에서 삼각형 OBR의 넓이를 뺀 것이므로

$$g(\theta) = \frac{1}{2} \times 1^2 \times 2\theta - \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OR} \times \sin 2\theta$$

$$g(\theta) = \theta - \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{5\theta}{2}} \times \sin 2\theta$$

$$g(\theta) = \theta - \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}\sin 2\theta}{2\sin\dfrac{5\theta}{2}}$$

(iii) 이등변삼각형 POQ에서

점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$$\overline{OH'} = \overline{OP} \times \cos\left(\frac{\pi - 3\theta}{2}\right)$$

$$= 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{3\theta}{2}$$

두 삼각형 OQH′, RQH가 서로 닮음이므로

$$\overline{OH'} : \overline{RH} = \overline{OQ} : \overline{RQ}$$

$$= 1 : (1 - \overline{OR})$$

$$\overline{RH} = \overline{OH'} \times (1 - \overline{OR})$$

$$= \sin\frac{3\theta}{2} \times \left(1 - \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{5\theta}{2}}\right)$$

(i), (ii), (iii)에서

$f(\theta) + g(\theta)$

$= \theta + \dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{2\sin\dfrac{5\theta}{2}} \times (\sin 3\theta - \sin 2\theta)$이고,

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{5\theta}{2}} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\theta}}{\dfrac{\sin\dfrac{5\theta}{2}}{\theta}}$$

$= \dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{1}{5}$이므로

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta) + g(\theta)}{\overline{RH}}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}} \times (\sin 3\theta - \sin 2\theta)}{\sin\frac{3\theta}{2} \times \left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{1 + \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{5\theta}{2}} \times \left(\frac{\sin 3\theta}{\theta} - \frac{\sin 2\theta}{\theta}\right)}{\frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\theta} \times \left(1 - \frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{5\theta}{2}}\right)}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} \times (3-2)}{\frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)}$$

$$= \frac{\frac{11}{10}}{\frac{6}{5}} = \frac{11}{12}$$

따라서

$p+q=12+11=23$

정답 23

29. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 4, 0, 0인 경우

흰 공의 개수가 4인 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 x, 나머지 두 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 각각 y, z라 하면

$x+y+z=6$에서 $x \geq 0$, $y \geq 2$, $z \geq 2$이어야 한다.

$y-2=y'$, $z-2=z'$이라 하면

$x+y'+z'=2$ (단, x, y', z'은 음이 아닌 정수) ……㉠

㉠을 만족시키는 순서쌍 (x, y', z')의 개수는

${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

이 각각에 대하여 흰 공이 4개 들어갈 상자를 택하는 경우의 수가

${}_3C_1 = 3$

이므로 이 경우의 수는

$6 \times 3 = 18$

(ⅱ) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 3, 1, 0인 경우

흰 공의 개수가 3, 1, 0인 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=6$에서 $x \geq 0$, $y \geq 1$, $z \geq 2$이어야 한다.

$y-1=y'$, $z-2=z'$이라 하면

$x+y'+z'=3$ (단, x, y', z'은 음이 아닌 정수) ……㉡

㉡을 만족시키는 순서쌍 (x, y', z')의 개수는

${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

이 각각에 대하여 흰 공이 3개, 1개 들어갈 상자 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3P_2 = 6$

이므로 이 경우의 수는

$10 \times 6 = 60$

(ⅲ) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 2, 2, 0인 경우

흰 공의 개수가 2, 2, 0인 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=6$에서 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 2$이

어야 한다.

$z-2=z'$이라 하면

$x+y+z'=4$ (단, x, y, z'은 음이 아닌 정수) ……㉢

㉢을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z')의 개수는

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

이 각각에 대하여 흰 공이 2개 들어갈 상자 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2=3$

이므로 이 경우의 수는

$15\times3=45$

(ⅳ) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 2, 1, 1인 경우

흰 공의 개수가 2, 1, 1인 상자에 들어가는 검은 공의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=6$에서 $x\ge0$, $y\ge1$, $z\ge1$이어야 한다.

$y-1=y'$, $z-1=z'$이라 하면

$x+y'+z'=4$ (단, x, y', z'은 음이 아닌 정수) ……㉣

㉣을 만족시키는 순서쌍 (x, y', z')의 개수는

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

이 각각에 대하여 흰 공이 2개 들어갈 상자 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

이므로 이 경우의 수는

$15\times3=45$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는

$18+60+45+45=168$

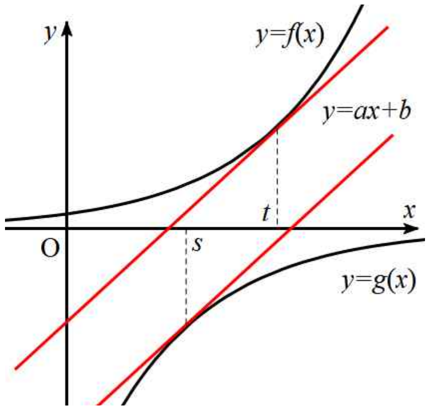
정답 168

30. **출제의도** : 미분을 활용하여 접선, 증가와 감소를 이용할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=e^{x-2}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

또, $g(x)=-e^{-x+1}$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.



한편, 곡선 $y=f(x)$위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은 $f'(x)=e^{x-2}$이므로

$y=e^{t-2}(x-t)+e^{t-2}$

$y=e^{t-2}x+(1-t)e^{t-2}$ -----㉠

또, 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(s, g(s))$에서의 접선의 방정식은 $g'(x)=e^{-x+1}$이므로

$y=e^{-s+1}(x-s)-e^{-s+1}$

$y=e^{-s+1}x+(-s-1)e^{-s+1}$ ---㉡

㉠과 ㉡에서 접선의 기울기가 같으면

$e^{t-2}=e^{-s+1}$

$t-2=-s+1$

$s=-t+3$ ----㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$y=e^{t-2}x+(t-4)e^{t-2}$ ---㉣

이때, ㉠과 ㉣에서 $x=t$일 때

$a=e^{t-2}$

$(t-4)e^{t-2} \le b \le (1-t)e^{t-2}$

그러므로

$(t-4)e^{2t-4} \le ab \le (1-t)e^{2t-4}$---㉤

한편, 두 접선이 일치하면

$(1-t)e^{t-2}=(-s-1)e^{-s+1}$

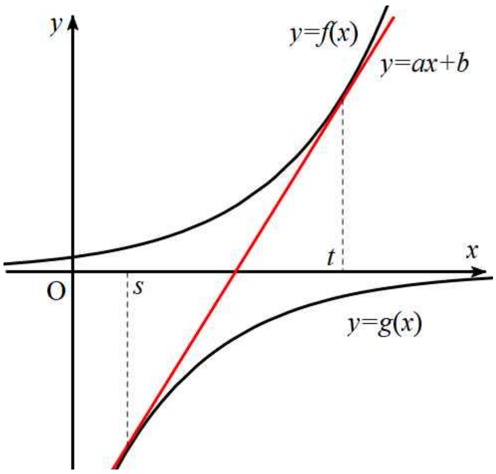
㉢을 대입하면

$(1-t)e^{t-2}=(t-4)e^{t-2}$

$1-t=t-4$

$2t=5$

$t=\frac{5}{2}$



그러므로

$t \le \frac{5}{2}$ -----㉥

㉤에서 $h(t)=(1-t)e^{2t-4}$이라 하면

$h'(t)=-e^{2t-4}+(2-2t)e^{2t-4}$

$=(1-2t)e^{2t-2}$

이므로 $h'(t)=0$에서

$t=\frac{1}{2}$

또, $k(t)=(t-4)e^{2t-4}$이라 하면

$k'(t)=e^{2t-4}+(2t-8)e^{2t-4}$

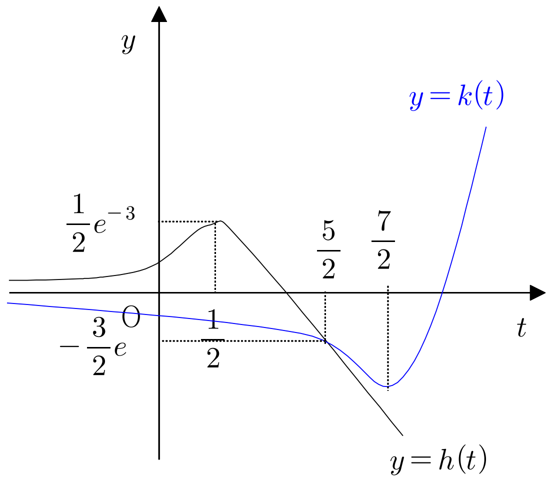
$=(2t-7)e^{2t-4}$

이므로 $k'(t)=0$에서

$t=\frac{7}{2}$

이때, $h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{-3}$, $k\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{2}e$이므로

$t \le \frac{5}{2}$에서 두 함수 $y=h(t)$, $y=k(t)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $t=\frac{5}{2}$에서 최솟값 $-\frac{3}{2}e$, $t=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\frac{1}{2}e^{-3}$을 가진다.

따라서

$|M\times m^3|=\left|\frac{1}{2}e^{-3}\times\left(-\frac{3}{2}e\right)^3\right|$

$=\frac{27}{16}$

이므로

$p+q=16+27=43$

정답 43