수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ②	02. ①	03. ④	04. ②	05. ⑤
06. ⑤	07. ③	08. ②	09. ③	10. ④
11. ①	12. ③	13. ③	14. ④	15. ④
16. ⑤	17. ①	18. ②	19. ⑤	20. ③
21. ②	22. 24	23. 8	24. 2	25. 41
26. 12	27. 121	28. 5	29. 168	
30. 105				

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt[3]{2}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^1=2$

정답 ②

2. 출제의도 : 미분계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=3x^2-2$

따라서

$f'(1)=3\times 1^2-2=1$

정답 ①

3. 출제의도 : 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$

이므로

$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+(-\sqrt{3})^2$

$=\frac{3}{4}+3$

$=\frac{15}{4}$

정답 ④

4. 출제의도 : 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+9x+8}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+8)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}(x+8)$

$=-1+8$

$=7$

정답 ②

5. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{9}{10}=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{4}{5}-\frac{9}{10}$

$=\frac{3}{10}$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$
$$=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}$$
$$=\frac{3}{4}$$

정답 ⑤

6. 출제의도 : 함수의 그래프를 보고 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 2-} f(x)$

$=2+0$

$=2$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 등차수열의 일반항을 이용하여 항의 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$d=-3$이므로

$a_7=a_3+4d=a_3-12$

$a_3a_7=a_3(a_3-12)=64$에서

$a_3{}^2-12a_3-64=0$

$(a_3+4)(a_3-16)=0$

$a_3=-4$ 또는 $a_3=16$

(i) $a_3=-4$일 때,

$a_8=a_3+5d=-4-15=-19<0$

이므로

$a_8>0$이라는 조건에 모순이다.

(ii) $a_3=16$일 때,

$a_8=a_3+5d=16-15=1>0$이므로

조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$a_3=16$

따라서

$a_2=a_3-d=16-(-3)=19$

정답 ③

8. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 수 a, b를 선택하는 모든 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=4\times4=16$

(i) $a=1$일 때,

$1<\frac{b}{1}<4$, 즉 $1<b<4$이므로

b는 존재하지 않는다.

(ii) $a=3$일 때,

$1<\frac{b}{3}<4$, 즉 $3<b<12$이므로

$b=4,\ 6,\ 8,\ 10$

(iii) $a=5$일 때,

$1<\frac{b}{5}<4$, 즉 $5<b<20$이므로

$b=6,\ 8,\ 10$

(iv) $a=7$일 때,

$1<\frac{b}{7}<4$, 즉 $7<b<28$이므로

$b=8,\ 10$

(i) ~ (iv)에서

주어진 조건을 만족시키도록 두 수 a, b를 선택하는 경우의 수는

$0+4+3+2=9$

따라서 구하는 확률은

$\frac{9}{16}$

정답 ②

9. **출제의도** : 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle C = 120^\circ$ 이므로

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin 120^\circ}$$

따라서

$$\overline{BC} = \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

정답 ③

10. **출제의도** : 함수의 미분가능성을 이해하여 미정계수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면

$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(1)=b+4$이므로

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+}\frac{bx+4-b-4}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+}\frac{b(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} b = b \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이고

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax+b-b-4}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax-4}{x-1} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하려면

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값이 존재해야 하므로

㉠, ㉡에서

$$\lim_{x\to 1-}\frac{x^3+ax-4}{x-1} = b \quad \cdots \text{㉢}$$

이어야 한다.

이때 $x\to 1-$일 때 (분모)$\to 0$이고 ㉢이 수렴하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1-}(x^3+ax-4) = 1+a-4 = 0$에서

$a=3$

이때 ㉢에서

$$b = \lim_{x\to 1-}\frac{x^3+3x-4}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1-}(x^2+x+4)$$

$$= 1^2+1+4$$

$$= 6$$

따라서

$a+b=3+6=9$

정답 ④

11. **출제의도** : 합의 기호의 성질을 이

용하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
x에 대한 이차방정식
$(n^2+6n+5)x^2-(n+5)x-1=0$
의 두 근의 합이 a_n이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$a_n=-\frac{-(n+5)}{n^2+6n+5}$$
$$=\frac{n+5}{(n+5)(n+1)}$$
$$=\frac{1}{n+1}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{10}(k+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}1$$
$$=\frac{10(10+1)}{2}+1\times10$$
$$=65$$

정답 ①

12. **출제의도** : 표본평균의 분포에서 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
플랫폼 근로자의 일주일 근무 시간을
확률변수 X라 하면
X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르므로
플랫폼 근로자 중에서 임의추출한 36명의 일주일 근무 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$을 따른다.
이때,

$$\mathrm{P}(\overline{X}\ge 38)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{38-m}{\frac{5}{6}}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{6}{5}(38-m)\right)$$
$$=0.9332$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{6}{5}(m-38)\right)=0.4332$$

이때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{6}{5}(m-38)=1.5$$

따라서 $m=39.25$

정답 ③

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각을 k $(k>0)$이라 하면
$v(k)=k^2-ak=0$에서
$k=a$
따라서 점 P가 시각 $t=0$일 때부터
시각 $t=a$일 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^a|v(t)|dt$$
$$=\int_0^a(-t^2+at)dt$$
$$=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{at^2}{2}\right]_0^a$$
$$=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}$$
$$=\frac{a^3}{6}$$

이므로 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$에서

$a^3=27$

따라서 $a=3$

정답 ③

14. 출제의도 : 원순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 학생 A, B를 제외한 나머지 6명의 학생 중 3명의 학생을 선택하는 경우의 수는

$_6C_3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$

이 각각에 대하여 두 학생 A, B를 한 사람으로 생각하여 4명의 학생이 원 모양의 탁자에 앉는 경우의 수는

$(4-1)!=3!=6$

이 각각에 대하여 두 학생 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times6\times2=240$

정답 ④

15. 출제의도 : 지수함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하고 지수방정식을 이용하여 지수함수 식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

$A(\alpha,\ \alpha)$, $B(\beta,\ \beta)$ $(\alpha<\beta)$로 놓으면

$\overline{AC}=\alpha$, $\overline{BD}=\beta$, $\overline{CD}=\beta-\alpha$

이때 사각형 ACDB의 넓이가 30이므로

$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta)=30$

$\beta^2-\alpha^2=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)=60$ …… ㉠

또한, $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=6\sqrt{2}$

$\sqrt{2}(\beta-\alpha)=6\sqrt{2}$

$\beta-\alpha=6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\beta+\alpha=10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=2$, $\beta=8$

또한, 두 점 $A(2,\ 2)$, $B(8,\ 8)$은 곡선 $y=2^{ax+b}$ 위의 점이므로

$2^{2a+b}=2$에서

$2a+b=1$ …… ㉣

$2^{8a+b}=8$에서

$8a+b=3$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

따라서

$a+b=\frac{2}{3}$

정답 ④

16. 출제의도 : 주어진 조건을 이해하여 수열의 일반항을 구하고 삼각형의 넓이를 식으로 나타낼 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{OP_n}:\overline{P_nQ_n}=\overline{P_nQ_n}:\overline{P_nP_{n+1}}$

이고 점 Q_n의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$a_n : \sqrt{3a_n} = \sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

즉, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \dfrac{(\sqrt{3a_n})^2}{a_n} = \boxed{3}$

이다.

따라서

$a_{n+1} = a_n + \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$

$\quad = a_n + 3$

이므로

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $a_1 = 1$이고

공차가 3인 등차수열이다.

따라서

$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$

이므로 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$A_n = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OP}_{n+1}} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$

$\quad = \dfrac{1}{2} \times a_{n+1} \times \sqrt{3a_n}$

$\quad = \dfrac{1}{2} \times (\boxed{3n+1}) \times \sqrt{9n-6}$

이다.

즉, $p = 3$, $f(n) = 3n+1$

이므로

$p + f(8) = 3 + 25 = 28$

정답 ⑤

17. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC에서

$\angle \mathrm{A} = 90^\circ$ 이므로

$S(x) = \dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AC}}$

$\quad = \dfrac{1}{2} \times 2\log_2 x \times \log_4 \dfrac{16}{x}$

$\quad = \log_2 x \times \left(2 - \dfrac{1}{2}\log_2 x\right)$

$\quad = -\dfrac{1}{2}(\log_2 x)^2 + 2\log_2 x$

$\quad = -\dfrac{1}{2}(\log_2 x - 2)^2 + 2$

$S(x)$는 $\log_2 x = 2$, 즉 $x = 4$일 때

최댓값 2를 가진다.

따라서 $a = 4$, $M = 2$이므로

$a + M = 4 + 2 = 6$

정답 ①

18. 출제의도 : 접선을 이용하여 주어진 부등식을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건에 의하여

$f(x) = a(x-1)^2 + b$ (b는 상수)로 놓으면

$f'(x) = 2a(x-1)$이므로

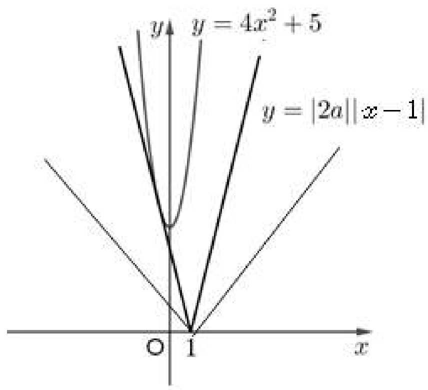
$|f'(x)| \le 4x^2 + 5$에서

$|2a(x-1)| \le 4x^2 + 5$ $\cdots\cdots$ ㉠

즉, ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로 두 곡선

$y = |2a(x-1)| = |2a||x-1|$, $y = 4x^2 + 5$

가 그림과 같아야 한다.



즉, 실수 a의 최댓값은 점 $(1,\ 0)$에서 곡선 $y=4x^2+5$에 그은 접선이 $y=-|2a|(x-1)$일 때이므로 접점을 $(k,\ 4k^2+5)$ $(k<0)$이라 하면

$y'=8x$에서

$y-(4k^2+5)=8k(x-k)$

이 접선이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$4k^2-8k-5=0$

$(2k-5)(2k+1)=0$

$k=-\frac{1}{2}$

즉, 접선의 기울기는

$8\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$

이므로

$-|2a|=-4,\ |a|=2$

$a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

정답 ②

19. **출제의도** : 여사건의 확률을 이해하여 수학적 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$의 개수는

${}_6C_2\times{}_6C_2=15\times15$

이때 $A\cap B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건은

$a_2<b_1$ 또는 $b_2<a_1$이다.

따라서 $A\cap B=\varnothing$을 만족시키는 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$의 개수는 다음과 같다.

(i) $a_2<b_1$일 때

$a_2=2$일 때 ${}_1C_1\times{}_4C_2=1\times6=6$

$a_2=3$일 때 ${}_2C_1\times{}_3C_2=2\times3=6$

$a_2=4$일 때 ${}_3C_1\times{}_2C_2=3\times1=3$

따라서 $6+6+3=15$

(ii) $b_2<a_1$일 때

(i)과 마찬가지이므로 이 경우의 수도 15이다.

이상에서 $A\cap B=\varnothing$일 확률은

$\frac{15+15}{15\times15}=\frac{2}{15}$

이므로 여사건의 확률에 의해

$A\cap B\neq\varnothing$일 확률은

$1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$

정답 ⑤

[다른 풀이]

모든 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$의 개수는

${}_6C_2\times{}_6C_2=15\times15$

이때 $A\cap B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건은

$a_2<b_1$ 또는 $b_2<a_1$이다.

따라서 $A\cap B=\varnothing$을 만족시키려면 6장의 카드 중에서 서로 다른 4장의 카드를 뽑고, 그 카드에 적힌 4개의 수를 크기순으로 작은 수부터 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$라 할 때,

$a_1=x_1,\ a_2=x_2,\ b_1=x_3,\ b_2=x_4$

또는

$b_1=x_1,\ b_2=x_2,\ a_1=x_3,\ a_2=x_4$

로 정하면 된다.

따라서 $A\cap B=\varnothing$을 만족시키는 순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2)$의 개수는 6장의 카드 중에서 서로 다른 4장의 카드를 택하는 경우의 수의 2배와 같으므로

$2\times{}_6C_4=2\times{}_6C_2=2\times15$

따라서 $A\cap B=\varnothing$일 확률은

$\frac{2\times 15}{15\times 15}=\frac{2}{15}$

이므로 여사건의 확률에 의해

$A\cap B\neq\varnothing$일 확률은

$1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2+3x=(x^2+1)+(3x-1)$

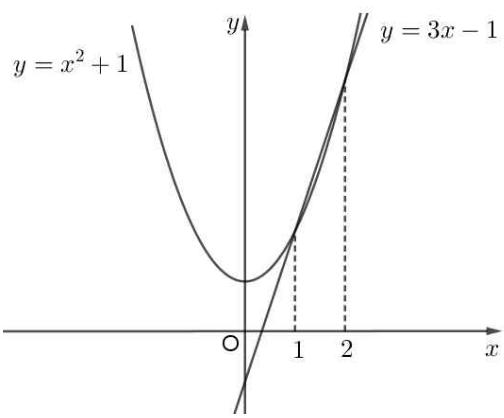
이고 두 함수 $y=x^2+1$, $y=3x-1$의 교점의 x좌표는

$x^2+1=3x-1$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$x=1$ 또는 $x=2$

이므로 두 함수의 그래프는 그림과 같다.



즉, $x\leq 1$ 또는 $x\geq 2$일 때

$x^2+1\geq 3x-1$

$1<x<2$일 때

$x^2+1<3x-1$

이므로 조건 (가)를 만족시키는 함수 $f(x)$, $g(x)$는 각각

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\leq 1)\\ 3x-1 & (1<x<2)\\ x^2+1 & (x\geq 2)\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}3x-1 & (x\leq 1)\\ x^2+1 & (1<x<2)\\ 3x-1 & (x\geq 2)\end{cases}$$

따라서

$\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_0^1 (x^2+1)dx+\int_1^2 (3x-1)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1+\left[\frac{3}{2}x^2-x\right]_1^2$

$=\frac{4}{3}+\left(4-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{29}{6}$

정답 ③

21. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $a_1\leq a_2$일 때,

$a_3=2a_1+a_2=2$ …… ㉠

이므로

$a_2>0$

① $a_1\geq 0$일 때

$a_2\leq a_3$이므로

$a_4=2a_2+a_3=2a_2+2$

$a_3\leq a_4$이므로

$a_5=2a_3+a_4=2a_2+6$

$a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로

$6a_2 + 10 = 19$

$a_2 = \dfrac{3}{2}$

$a_2 = \dfrac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면

$2a_1 + \dfrac{3}{2} = 2$

$a_1 = \dfrac{1}{4}$

② $a_1 < 0$일 때

$a_2 > a_3$이므로

$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + 2$

$a_3 \le a_4$이므로

$a_5 = 2a_3 + a_4 = a_2 + 6$

$a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 3a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로

$3a_2 + 10 = 19$

$a_2 = 3$

$a_2 = 3$을 ㉠에 대입하면

$2a_1 + 3 = 2$

$a_1 = -\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $a_1 > a_2$일 때

$a_3 = a_1 + a_2 = 2$ …… ㉡

이므로

$a_1 > 0$

$a_2 \le a_3$이므로

$a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$

① $a_2 \ge 0$일 때

$a_3 \le a_4$이므로

$a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$

$a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$

이때, $a_6 = 19$이므로

$6a_2 + 10 = 19$

$a_2 = \dfrac{3}{2}$

$a_2 = \dfrac{3}{2}$을 ㉡에 대입하면

$a_1 + \dfrac{3}{2} = 2$

$a_1 = \dfrac{1}{2}$

이때, $a_1 < a_2$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_1의 값은 존재하지 않는다.

② $a_2 < 0$일 때

$a_3 > a_4$이므로

$a_5 = a_3 + a_4 = 2a_2 + 4$

$a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 8$

이때, $a_6 = 19$이므로

$6a_2 + 8 = 19$

$a_2 = \dfrac{11}{6}$

이때, $a_2 > 0$이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_2와 a_1의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_1 = \dfrac{1}{4}$ 또는 $a_1 = -\dfrac{1}{2}$

따라서 모든 a_1의 값의 합은

$\dfrac{1}{4} + \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$

정답 ②

22. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x+3)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8\mathrm{C}_r\, x^{8-r}\times 3^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

이므로 x^7의 계수는 $r=1$일 때

${}_8\mathrm{C}_1\times 3=8\times 3=24$

정답 24

23. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int(-x^3+3)dx$$
$$=-\frac{1}{4}x^4+3x+C$$

(단, C는 적분상수이다.)

$f(2)=-\frac{1}{4}\times 2^4+3\times 2+C=10$에서

$C=8$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+3x+8$이므로

$f(0)=8$

정답 8

24. 출제의도 : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_5 40+\log_5\frac{5}{8}$$
$$=\log_5\left(40\times\frac{5}{8}\right)$$
$$=\log_5 25$$
$$=\log_5 5^2$$
$$=2\log_5 5=2$$

정답 2

25. 출제의도 : 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABD에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AD}}=6$, $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{15}$

이므로 $\angle\mathrm{BAD}=\theta$라 하면 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times 6\times 6}=\frac{19}{24}$$

따라서 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의해

$$k^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$$
$$=6^2+10^2-2\times 6\times 10\times\cos\theta$$
$$=36+100-120\times\frac{19}{24}$$
$$=136-5\times 19$$
$$=41$$

정답 41

26. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 근의 개수를 파악한 후 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $x^3-x^2-8x+k=0$에서

$x^3-x^2-8x=-k$

$f(x)=x^3-x^2-8x$라 하면

$$f'(x)=3x^2-2x-8$$
$$=(3x+4)(x-2)$$

$f'(x)=0$에서

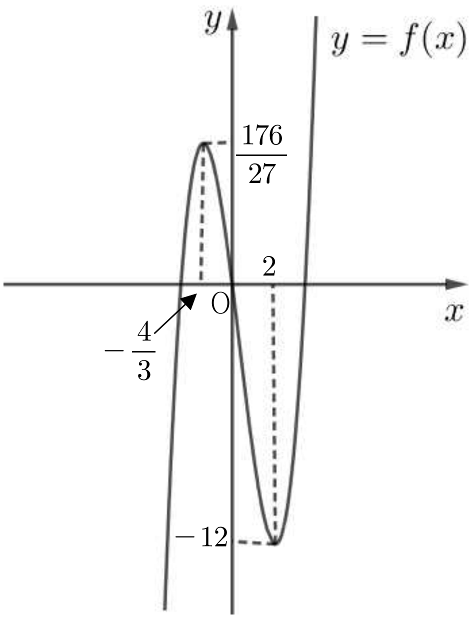
$x=-\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\dfrac{4}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{176}{27}$, $f(2)=-12$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



방정식 $f(x)=-k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-k=\dfrac{176}{27}$ 또는 $-k=-12$

즉, $k=-\dfrac{176}{27}$ 또는 $k=12$

이다.

이때 k는 양수이므로

$k=12$

정답 12

27. 출제의도 : 이산확률변수의 성질을 이용하여 기댓값과 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$Y=10X+1$ 이고

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\quad=5-2^2=1$

이므로

$\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)$

$=\mathrm{E}(10X+1)+\mathrm{V}(10X+1)$

$=10\mathrm{E}(X)+1+100\mathrm{V}(X)$

$=10\times2+1+100\times1=121$

정답 121

28. 출제의도 : 함수의 증가, 감소와 도함수의 관계를 이용하여 실수 a의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

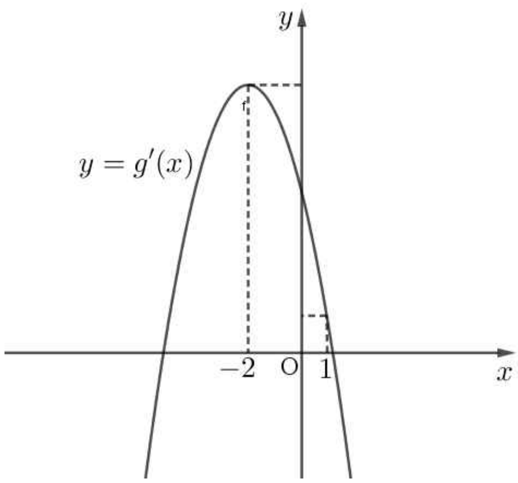
$f(x)=-x^2-4x+a$

$g(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$에서

$g'(x)=f(x)$

$\quad=-x^2-4x+a$

$\quad=-(x+2)^2+a+4$



함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 증가해야 하므로

$g'(1)=a-5 \geq 0$

즉, $a \geq 5$이어야 한다.

따라서 a의 최솟값은 5이다.

정답 5

29. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

흰 공 4개, 검은 공 6개를 세 상자 A, B, C에 남김없이 나누어 넣을 때, 각 상자에 2개 이상씩 들어가도록 나누어 넣어야 하므로 10개의 공을

$$\begin{aligned}10&=6+2+2\\&=5+3+2\\&=4+4+2\\&=4+3+3\end{aligned}$$

와 같이 4가지 경우로 나누고 흰 공 4개를 나누어 넣으면 나머지에 검은 공을 넣으면 된다.

(i) 세 상자에 6개, 2개, 2개를 넣는 경우

세 상자 A, B, C에 들어갈 공의 개수를 정하는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

세 상자 A, B, C에 들어가는 흰 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=4$

이를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$ …… ㉠

㉠ 중에서 예를 들면 A, B, C의 상자에 공을 각각 6개, 2개, 2개 넣는 경우에

$(0,\ 4,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 4)$, $(0,\ 3,\ 1)$, $(1,\ 3,\ 0)$

$(0,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 0,\ 3)$

의 6개의 순서쌍은 조건을 만족시키지 못하므로 이때의 경우의 수는

$3\times(15-6)=27$

(ii) 세 상자에 5개, 3개, 2개를 넣는 경우

세 상자 A, B, C에 들어갈 공의 개수를 정하는 경우의 수는

$3!=6$

㉠ 중에서 예를 들면 A, B, C의 상자에 공을 각각 5개, 3개, 2개 넣는 경우에

$(0,\ 4,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 4)$, $(0,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 0,\ 3)$

의 4개의 순서쌍은 조건을 만족시키지 못하므로 이때의 경우의 수는

$6\times(15-4)=66$

(iii) 세 상자에 4개, 4개, 2개를 넣는 경우

세 상자 A, B, C에 들어갈 공의 개수를 정하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

㉠ 중에서 예를 들면 A, B, C의 상자에 공을 각각 4개, 4개, 2개 넣는 경우에

(0, 0, 4), (0, 1, 3), (1, 0, 3)

의 3개의 순서쌍은 조건을 만족시키지 못하므로 이때의 경우의 수는

$3\times(15-3)=36$

(iv) 세 상자에 4개, 3개, 3개를 넣는 경우

세 상자 A, B, C에 들어갈 공의 개수를 정하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

㉠ 중에서 예를 들면 A, B, C의 상자에 공을 각각 4개, 3개, 3개 넣는 경우에

(0, 4, 0), (0, 0, 4)

의 2개의 순서쌍은 조건을 만족시키지 못하므로 이때의 경우의 수는

$3\times(15-2)=39$

(i) ~ (iv)에 의하여

구하는 경우의 수는

$27+66+36+39=168$

정답 168

30. **출제의도** : 절댓값이 있는 함수의 미분가능성의 정의를 파악하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $p(\neq 0)$라 하면

조건 (가)에서

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-q)$ (p, q는 상수)

로 놓을 수 있고,

조건 (나)에서

$q<1$이다.

이때

$f(a-x)$

$=p(a-x-1)(a-x-3)(a-x-q)$

$=-p(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$

이므로

$$f(x)f(a-x)=-p^2(x-1)(x-3)(x-q)\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)$$

따라서

$$\begin{aligned}g(x)&=|f(x)f(a-x)|\\&=p^2|(x-1)(x-3)(x-q)\\&\quad\times(x-a+1)(x-a+3)(x-a+q)|\end{aligned}$$

이고 $q<1<3$이고 $a-3<a-1<a-q$이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$g(x)=p^2|(x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2|$

꼴이어야 한다.

따라서

$a-3=q$, $a-1=1$, $a-q=3$

이어야 한다.

따라서 $a=2$, $q=-1$이므로

$f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$,

$f(a-x)=-p(x+1)(x-1)(x-3)=-f(x)$

이다.

따라서

$g(x)=|f(x)f(a-x)|=f(x)^2$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}&=\frac{f(8)^2}{f(0)\times f(8)}\\&=\frac{f(8)}{f(0)}\\&=\frac{p\times 9\times 7\times 5}{p\times 1\times(-1)\times(-3)}\\&=105\end{aligned}$$

정답 105