#붙임1 : 교육과정을 벗어난 것으로 판정된 근거 (요약)

※ 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 것으로 판정되는 문제의 유형은 크게 세 가지로 나눌 수 있습니다.

① 교육과정 성취기준 또는 평가기준에 명시된 사항을 벗어난 경우

② 교육과정 성취기준 또는 평가기준에 명시되지 않은 내용을 출제한 경우

③ 상위 단원 내용 또는 대학 과정의 내용을 출제한 경우

영역	과목 구분	문항 번호	위반 유형 ①	위반 유형 ②	위반 유형 ③	교육과정을 벗어난 것으로 판정한 근거	미준수 비율
수학	공통 문항	10	●	●	●	아래의 정리 및 성질을 사용하면 문제를 더 쉽게 풀 수 있음. ◆ ‘원과 비례’ (교수학습 방법 및 유의 사항 미준수) ◆ ‘삼각형의 중선 정리(파포스 정리)’ (교육과정 및 교과서 밖의 내용) ◆ ‘톨레미 정리(할선 정리)’ (대학 과정의 내용)	23.9% (11/46)
		12	●			◆ $\sum_{k=1}^{6}\lvert a_{k+6}\rvert$ 기호는 교육과정 내에서 사용할 수 없는 기호 ◆ 수열의 합 관련 복잡한 문제 (교수학습 방법 및 유의 사항 미준수)	
		14	●			◆ 함수의 그래프 개형이 다양하고 복잡 (평가 방법 및 유의 사항 미준수)	
		15	●	●		◆ 교육과정 성취기준과 평가기준을 벗어나는 문제임. ◆ 계산 과정이 지나치게 복잡함 (경우의 수가 많음)	
		20	●	●	●	◆ $g(x)=\int_{x}^{x+1}\lvert f(t)\rvert dt$ (아래끝이 변수인 적분은 교육과정을 벗어남) ◆ 오답률 88% (EBS 제공) ◆ 선택과목에서 <미적분>을선택한 학생들에게 유리한 문제임. (합성함수 미분은 선택과목 <미적분>에서 다루므로 미적분 선택자에게 유리)	
		21			●	◆ 정수가 되는 조건을 찾는 과정에서 대학 과정의 <정수론> 내용 포함	
		22	●	●		◆ <보기>에 주어진 극한 $\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{\lvert g(x)\rvert+\{g(t)\}^2}-\lvert g(t)\rvert}{(x+3)^2}$ 은 지나치게 복잡함 ◆ 함수의 극한과 관련된 교육과정 평가 방법 및 유의 사항 미준수 ◆ $\lvert AB\rvert=\lvert A\rvert\times\lvert B\rvert$, $\sqrt{A^2}=\lvert A\rvert$는 교육과정을 벗어나는 내용	
	미적분	28	●			◆ 함수 $g(x)$의 정의역이 함수$f(x)$와 관련된 조건으로 표현되어 있음. ◆ 함수 $g(x)$는 삼차함수 $f(x)$와 로그함수의 합성함수로 복잡한 함수임. ◆ 도함수를 이용해 함수의 그래프 개형을 그리는 과정이 복잡함.	
		29	●			◆ 삼각함수의 극한을 구하는 과정이 복잡 (교수학습 방법 및 유의 사항 미준수) ◆ 풀이 과정 중 ‘삼각형의 각의 이등분선 성질’ 활용함 ◆ 오답률 91%	
		30	●		●	◆ 오답률 95% ◆ 지수함수가 포함된 식의 극한을 구하기 위해서는 대학 과정에서 배울 수 있는 ‘로피탈의 정리’를 이용해야 함. ◆ 함수 f(x)의 그래프를 그리는 과정이 지나치게 복잡함 (평가 방법 및 유의 사항 미준수)	
	기하	28		●		◆ 문제 주어진 조건만으로 쌍곡선을 유추하기는 어려움	
총계 (개)		11	9	5	4		23.9%

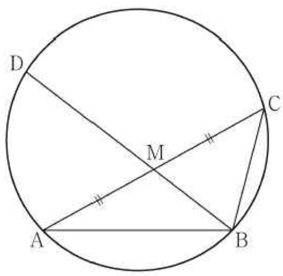
■ 고교과정 벗어난 근거

■ 공통 10번 문항

※ 문항 및 문항 분석 / 풀이

10번 문항

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

10번 문항 풀이 (EBS 해설지)

같은 방법으로 삼각형 ABM에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{MB}^2=\overline{AB}^2+\overline{AM}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AM}\times\cos\theta$$
$$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\frac{7}{8}$$
$$=\frac{5}{2}$$

이므로

$$\overline{MB}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

이때 두 삼각형 ABM, DCM은 서로 닮은 도형이므로

$$\overline{MA}\times\overline{MC}=\overline{MB}\times\overline{MD}$$

에서

문항 분석

◆ **'삼각형의 중선 정리 (파포스 정리)'나 '톨레미 정리(대학 과정)'를 사용하면 쉽고 빠르게 풀 수 있음**

선분 MB의 길이를 구하는 과정에서 코사인 법칙을 사용하지 않고 삼각형 ABC에서 '삼각형의 중선 정리'를 이용하면 선분 MB의 길이를 더 빠르고 쉽게 풀 수 있습니다. 하지만 '삼각형의 중선 정리' 교육과정에서 다루지 않는 내용입니다.

'톨레미 정리'는 한 원에 내접하는 사각형에 대해 두 대각선의 길이와 두 대변의 길이와의 관계를 식으로 나타낸 것으로 이 정리를 알고 있으면 10번 문항을 풀 때 도움이 될 수 있습니다. 하지만 '톨레미 정리'는 현 교육과정에 없는 내용입니다

◆ **현 교육과정에서 다룰 수 없는 '원과 비례에 관한 성질'이 풀이 과정에서 사용되고 있음.**

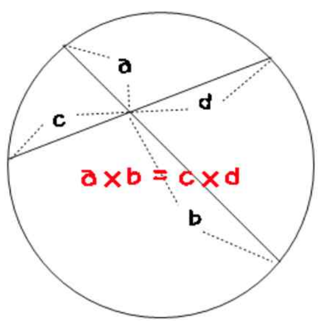
한 원에 내접하는 사각형에 대해서 성립하는 성질인 $\overline{MA}\times\overline{MC}=\overline{MB}\times\overline{MD}$와 같은 '원과 비례에 관한 성질'은 2015 개정 수학과 교육과정의 중학교 기하 단원의 교수학습 방법 및 유의 사항에서 '원과 비례에 관한 성질은 다루지 않는다.'라고 명시하고 있어서 '원과 비례에 관한 성질'은 다룰 수 없습니다.

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정 기준)

2015 개정 수학과 교육과정 중학교 <기하> 단원의 교수·학습 방법 및 유의 사항
● 원과 비례에 관한 성질은 다루지 않는다.

※ 원과 비례에 관한 성질 / 삼각형의 중선 정리 / 톨레미 정리

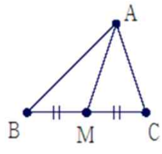
원과 비례에 관한 성질



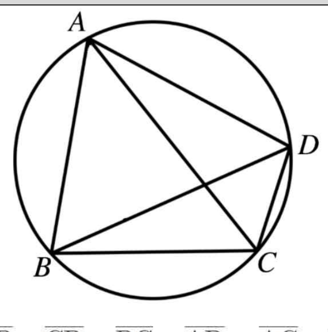
삼각형의 중선 정리

파포스의 중선정리

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{MB}^2)$$



톨레미 정리



$$\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{BC}\times\overline{AD}=\overline{AC}\times\overline{BD}$$

■ 공통 12번 문항

※ 문항 및 문항 분석

8번 문항	12번 문항 풀이 (EBS 해설지)
12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점] (가) $a_5 \times a_7 < 0$ (나) $\boxed{\sum_{k=1}^{6} \lvert a_{k+6} \rvert} = 6 + \boxed{\sum_{k=1}^{6} \lvert a_{2k} \rvert}$ ① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$	**◆ 조건 (나)에 제시된 수열의 합의 기호표현이 교육과정을 벗어난 기호표현이며 풀이 과정이 복잡함** 조건 (나)에 제시되어있는 수열의 합 기호표현에서 수열의 아래 첨자가 k+6, 2k인 수열의 기호표현, 절댓값 기호가 포함되어 있어서 교육과정에서 사용할 수 있는 기호표현에서 벗어납니다. 그리고 문항의 풀이 과정에서도 절댓값에 대한 양수와 음수의 부호를 생각해야 하므로 그 풀이 과정이 복잡합니다.

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정 근거)

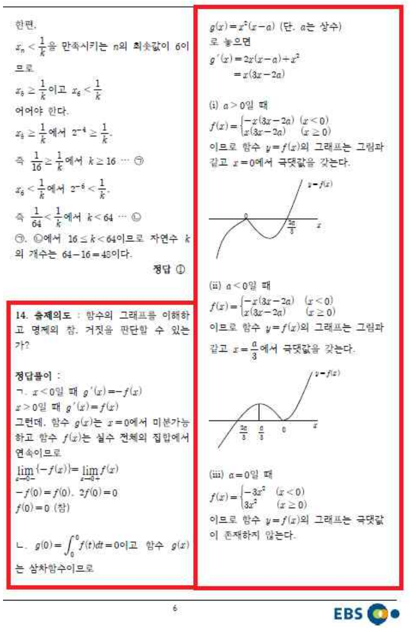
2015 개정 수학과 교육과정 <수학 I > 수열 단원 학습 요소와 교수학습 방법 및 유의 사항
• 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, a_n, $\{a_n\}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ • 여러 가지 수열의 합에서는 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$과 수열의 합이 간단한 것만 다룬다.

■ 공통 14번 문항

※ 문항 및 문항 분석 / 풀이

14번 문항	문항 분석
14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가 $$g(x)=\begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x\ge 0) \end{cases}$$ 을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] <보 기> ㄱ. $f(0)=0$ ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다. ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ	**◆ 도함수를 이용하여 함수 f(x)의 그래프 개형을 찾는 과정이 지나치게 복잡함** 도함수를 이용하여 함수 f(x)의 그래프 개형을 그리는 과정에서 함수가 하나의 그래프로 그려지지 않고 경우에 따라 3가지 유형의 그래프를 생각해야 하므로 그 과정이 복잡합니다. 특히, 보기 ㄷ를 만족하는지 알아보기 위해 직선 y=x와 함수 f(x)의 교점의 개수를 찾는 과정이 필요한데 여기서 함수 f(x)에는 미분가능하지 않은 첨점이 존재하기 때문에 직선 y=x가 첨점을 지날 때 함수 f(x)와 몇 개의 점에서 만나는지 정확하게 파악하기가 어렵습니다. EBS에서 공개한 문항 해설지를 보더라도 그 풀이가 4쪽 분량으로 풀이 과정이 상당히 길고 함수 g(x)는 x의 범위에 따라 f(x)의 정적분으로 정의된 함수임으로 함수 g(x)는 복잡한 함수에 해당합니다. 본 문항은 ‘도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그리거나 최댓값과 최솟값을 구하는 능력을 평가할 때, 지나치게 복잡한 함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다.’라고 명시되어 있어서 교육과정의 수준과 범위를 벗어난 것으로 판정됩니다.

12번 문항 풀이 (EBS 해설지)


한편,
$x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로
$x_5\ge\frac{1}{k}$이고 $x_6<\frac{1}{k}$
이어야 한다.
$x_5\ge\frac{1}{k}$에서 $2^{-4}\ge\frac{1}{k}$,
즉 $\frac{1}{16}\ge\frac{1}{k}$에서 $k\ge 16$ ⋯ ㉠
$x_6<\frac{1}{k}$에서 $2^{-6}<\frac{1}{k}$,
즉 $\frac{1}{64}<\frac{1}{k}$에서 $k<64$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $16\le k<64$이므로 자연수 k의 개수는 $64-16=48$이다.
정답 ①

14. **출제의도** : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :
ㄱ. $x<0$일 때 $g'(x)=-f(x)$
$x>0$일 때 $g'(x)=f(x)$
그런데, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0-}\{-f(x)\}=\lim_{x\to 0+}f(x)$
$-f(0)=f(0)$, $2f(0)=0$
$f(0)=0$ (참)

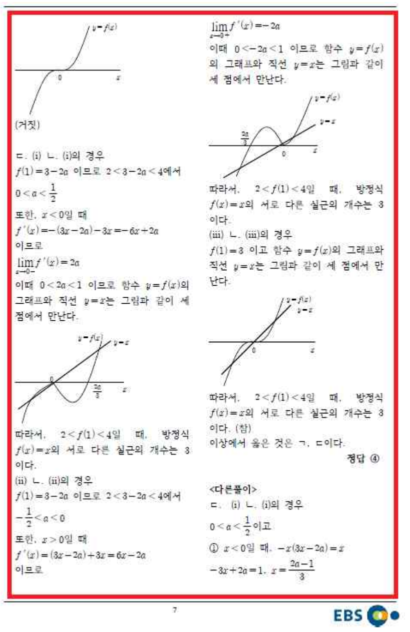
ㄴ. $g(0)=\int_0^0 f(t)dt=0$이고 함수 $g(x)$는 삼차함수이므로
$g(x)=x^2(x-a)$ (단, a는 상수)
로 놓으면
$g'(x)=2x(x-a)+x^2$
$=x(3x-2a)$

(i) $a>0$일 때
$f(x)=\begin{cases}-x(3x-2a) & (x<0)\\ x(3x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.

(ii) $a<0$일 때
$f(x)=\begin{cases}-x(3x-2a) & (x<0)\\ x(3x-2a) & (x\ge 0)\end{cases}$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고 $x=\frac{a}{3}$에서 극댓값을 갖는다.

(iii) $a=0$일 때
$f(x)=\begin{cases}-3x^2 & (x<0)\\ 3x^2 & (x\ge 0)\end{cases}$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 극댓값이 존재하지 않는다.

6



(거짓)

ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우
$f(1)=3-2a$ 이므로 $2<3-2a<4$에서
$0<a<\frac{1}{2}$
또한, $x<0$일 때
$f'(x)=-(3x-2a)-3x=-6x+2a$
이므로
$\lim_{x\to 0-}f'(x)=2a$
이때 $0<2a<1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.

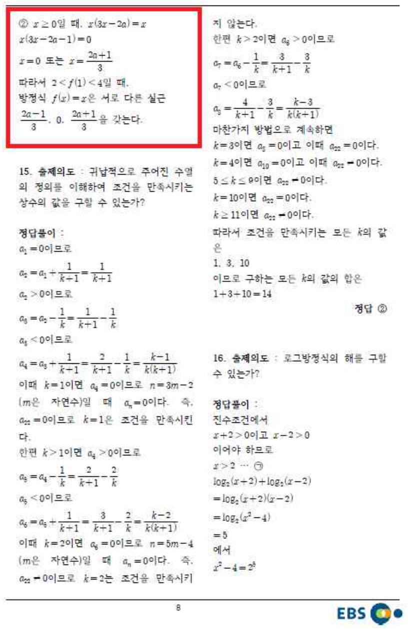
따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
(ii) ㄴ. (ii)의 경우
$f(1)=3-2a$ 이므로 $2<3-2a<4$에서
$-\frac{1}{2}<a<0$
또한, $x>0$일 때
$f'(x)=(3x-2a)+3x=6x-2a$
이므로
$\lim_{x\to 0+}f'(x)=-2a$
이때 $0<-2a<1$ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.

따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
(iii) ㄴ. (iii)의 경우
$f(1)=3$ 이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 그림과 같이 세 점에서 만난다.

따라서, $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. (참)
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
정답 ④

<다른풀이>
ㄷ. (i) ㄴ. (i)의 경우
$0<a<\frac{1}{2}$이고
① $x<0$일 때, $-x(3x-2a)=x$
$-3x+2a=1$, $x=\frac{2a-1}{3}$

7


② $x\ge 0$일 때, $x(3x-2a)=x$
$x(3x-2a-1)=0$
$x=0$ 또는 $x=\frac{2a+1}{3}$
따라서 $2<f(1)<4$일 때,
방정식 $f(x)=x$은 서로 다른 실근 $\frac{2a-1}{3}$, 0, $\frac{2a+1}{3}$을 갖는다.

15. **출제의도** : 귀납적으로 주어진 수열의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$a_1=0$이므로
$a_2=a_1+\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k+1}$
$a_2>0$이므로
$a_3=a_2-\frac{1}{k}=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}$
$a_3<0$이므로
$a_4=a_3+\frac{1}{k+1}=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k(k+1)}$
이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 $n=3m-2$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.
한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로
$a_5=a_4-\frac{1}{k}=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}$
$a_5<0$이므로
$a_6=a_5+\frac{1}{k+1}=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}=\frac{k-2}{k(k+1)}$
이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 $n=5m-4$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}\neq 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.
한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로
$a_7=a_6-\frac{1}{k}=\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k}$
$a_7<0$이므로
$a_8=\frac{4}{k+1}-\frac{3}{k}=\frac{k-3}{k(k+1)}$
마찬가지 방법으로 계속하면
$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.
$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\neq 0$이다.
$5\le k\le 9$이면 $a_{22}\neq 0$이다.
$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.
$k\ge 11$이면 $a_{22}\neq 0$이다.
따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은
1, 3, 10
이므로 구하는 모든 k의 값의 합은
$1+3+10=14$
정답 ②

16. **출제의도** : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
진수조건에서
$x+2>0$이고 $x-2>0$
이어야 하므로
$x>2$ ⋯ ㉠
$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)$
$=\log_2(x+2)(x-2)$
$=\log_2(x^2-4)$
$=5$
에서
$x^2-4=2^5$

8

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정 근거)

2015 개정 수학과 교육과정 <수학Ⅱ> 미분 단원 학습 요소와 평가 방법 및 유의 사항
• 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그리거나 최댓값과 최솟값을 구하는 능력을 평가할 때, 지나치게 복잡한 함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다.

■ 공통 15번 문항

※ 문항 및 문항 분석 / 풀이

15번 문항

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

15번 문항 풀이 (EBS 해설지)

② $x \ge 0$일 때, $x(3x-2a)=x$

$x(3x-2a-1)=0$

$x=0$ 또는 $x=\dfrac{2a+1}{3}$

따라서 $2<f(1)<4$일 때,

방정식 $f(x)=x$은 서로 다른 실근

$\dfrac{2a-1}{3}$, 0, $\dfrac{2a+1}{3}$을 갖는다.

15. **출제의도** : 귀납적으로 주어진 수열의 정의를 이해하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1=0$이므로

$a_2=a_1+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$

$a_2>0$이므로

$a_3=a_2-\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}$

$a_3<0$이므로

$a_4=a_3+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}=\dfrac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k=1$이면 $a_4=0$이므로 $n=3m-2$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}=0$이므로 $k=1$은 조건을 만족시킨다.

한편 $k>1$이면 $a_4>0$이므로

$a_5=a_4-\dfrac{1}{k}=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{2}{k}$

$a_5<0$이므로

$a_6=a_5+\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{k}=\dfrac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k=2$이면 $a_6=0$이므로 $n=5m-4$ (m은 자연수)일 때 $a_n=0$이다. 즉, $a_{22}\ne 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로

$a_7=a_6-\dfrac{1}{k}=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{3}{k}$

$a_7<0$이므로

$a_8=\dfrac{4}{k+1}-\dfrac{3}{k}=\dfrac{k-3}{k(k+1)}$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.

$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\ne 0$이다.

$5\le k\le 9$이면 $a_{22}\ne 0$이다.

$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.

$k\ge 11$이면 $a_{22}\ne 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

1, 3, 10

이므로 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+3+10=14$

정답 ②

16. **출제의도** : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수조건에서

$x+2>0$이고 $x-2>0$

이어야 하므로

$x>2$ ⋯ ㉠

$\log_2(x+2)+\log_2(x-2)$

$=\log_2(x+2)(x-2)$

$=\log_2(x^2-4)$

$=5$

에서

$x^2-4=2^5$

문항 분석

◆ 교육과정 성취기준과 평가기준을 벗어남

10번 문항은 귀납적으로 정의된 수열에 대한 문항입니다. 하지만 실생활문제와도 연관되지 않습니다. 그리고 수열의 a_n의 부호가 자연수 k와 연관되어 있어 수열의 a_n과 a_{n+1}사이의 관계가 간단하지 않으며 귀납적으로 정의된 수열에서의 특별한 항을 구하는 문제에도 해당하지 않습니다. 따라서 이 문항은 수학적 귀납법에 대한 교육과정 평가기준 상, 중, 하 어떤 부분에도 해당하지 않아 교육과정 성취기준뿐만 아니라 평가기준의 범위를 벗어난 것으로 판정됩니다.

◆ 계산 과정이 지나치게 복잡함 (경우의 수가 많음)

EBS 문항 해설지를 보아도 알 수 있듯이 자연수 k의 값에 따라 수열 a_n의 부호를 결정해야 합니다. 문제에 주어진 조건을 만족하도록 k에 자연수를 하나하나 대입해가며 수열의 부호를 찾는 과정이 지나치게 복잡합니다.

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정 및 평가기준 근거)

2015 개정 수학과 교육과정 <수학Ⅰ> 교육과정 성취기준 및 평가기준

(다) 수학적 귀납법

교육과정 성취기준		평가기준	
[12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.	[평가준거 성취기준 ①] 수열의 귀납적 정의를 이해할 수 있다.	상	수열과 관련된 실생활 문제에서 인접한 항 사이의 관계를 추론하고, 이를 귀납적 정의를 이용하여 표현할 수 있다.
		중	수열의 귀납적 정의에 대해 말할 수 있고, 관계가 간단한 수열을 귀납적으로 정의할 수 있다.
		하	귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항을 구할 수 있다.

■ 공통 20번 문항

※ 문항 및 문항 분석

20번 문항	문항 분석
20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $\boxed{g(x)=\int_{x}^{x+1}\lvert f(t)\rvert dt}$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]	◆ $g(x)=\int_{x}^{x+1}\lvert f(t)\rvert dt$ 정적분에서 위 끝이 변수인 경우는 선택과목인 <미적분> 교과에서 다루지만, 정적분에서 아래 끝이 변수인 적분 기호는 교육과정의 수준과 범위를 벗어나는 표현입니다 **◆ 오답률 88% (EBS 제공)** **◆ 선택과목에서 <미적분>을 선택한 학생들에게 유리한 문제** 20번 문항은 공통문항으로 출제 범위는 <수학Ⅰ>, <수학Ⅱ>에 해당하는 문제입니다. 본 문항을 푸는 과정에서 합성함수 미분법을 이용하면 더욱더 빠르게 문제를 해결할 수 있습니다. 하지만 합성함수 미분법은 수학Ⅱ에서 다루는 내용이 아니며 선택과목인 <미적분>에서 다루는 내용입니다. 따라서 본 문항은 수학 선택과목 중 <확률과 통계>나 <기하>를 선택한 학생들에게는 불리한 문제로 판단됩니다

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정)

2015 개정 교육과정 <수학Ⅱ> 미분에 관한 평가 방법 및 유의 사항
• 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그리거나 최댓값과 최솟값을 구하는 능력을 평가할 때, 지나치게 복잡한 함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다.
2015 개정 교육과정 <미적분> 미분법에 관한 성취기준
[2] 여러 가지 미분법 [12미적02-06] 함수의 몫을 미분할 수 있다. [12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다. [12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.

※ 오답률 88% (EBS 제공)

공통 20번 문항 오답률 (EBS 제공)

순위	문항 번호	오답률	배점	정답
1	22	98.0	4	19
2	30	95.0	4	16
3	29	91.0	4	50
4	20	88.0	4	13

■ 공통 21번 문항

※ 문항 및 문항 분석

21번 문항	21번 문항 풀이 (EBS 해설지)
21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]	$\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)^2=8^m$ (m은 정수) ⋯⋯㉠ 의 꼴이 되어야 한다. 그러려면 우선 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로 $n=3k-1$ (k는 $1\le k\le 333$인 자연수) 이어야 한다. 이때 ㉠에서

문항 분석
◆ 정수가 되는 조건을 찾는 과정에서 대학 과정의 <정수론> 내용 포함 EBS 해설지에 제시된 문항 풀이에서 식㉠을 만들어 내는 것은 가능하지만 식㉠을 만족하려면 4n+16이 3의 배수가 되어야 한다는 과정에서 음수 지수를 생각해야 하므로 이를 유추해 내기는 쉽지 않습니다. 또한 4n+16이 3의 배수가 된다는 조건을 이용해 $n=3k-1(1\le k\le 399)$ 꼴로 나타내어진다는 것은 대학 과정인 <정수론> 교재에 있는 modulos정리(일차합동식)내용에 해당하고 이를 이용하면 n의 값을 더 쉽게 구할 수 있습니다.

※ 대학 전공 수학 <정수론> 내용

합동식에 관련된 내용

정의 3.1.1 고정된 양의 정수 m에 대하여, 두 정수 a, b의 차가 m의 배수일 때, 즉 $m\mid(a-b)$일 때, a와 b는 **法**(modulus) m에 관하여 **합동**(congruent)이라 하고, 이 사실을 $a\equiv b\pmod{m}$으로 나타낸다. 즉,

$$a\equiv b\pmod{m}\iff m\mid(a-b)$$

또, $a\equiv b\pmod{m}$이 아닐 때, 이 사실을 $a\not\equiv b\pmod{m}$로 나타낸다. 그리고, 합동 기호 $\equiv$가 들어 있는 식을 **합동식**이라고 한다.

정의에 의하여 다음이 성립한다.

$$a\equiv 0\pmod{m}\iff m\mid a$$

정수를 계수로 가지는 다항식 $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1 x+a_0$에 대하여 합동식

$$f(x)\equiv 0\pmod{m}$$

을 **다항합동식**(polynomial congruence)이라 하고, 특히 $a_n\not\equiv 0\pmod{m}$일 때 이 합동식을 (x에 관한) **n차의 합동식**이라고 한다.

보기 3.4.1 일차합동식 $7x\equiv 5\pmod{31}$의 해를 구해 보자.

먼저 $(31,\ 7)=1$이고, 다음이 성립한다.

$$31\cdot(-2)+7\cdot 9=1,$$
$$31\cdot(-10)+7\cdot 45=5$$
$$7\cdot 45\equiv 5\pmod{31}$$
$$7\cdot 14\equiv 5\pmod{31}$$

따라서 구하는 해는 $x\equiv 14\pmod{31}$이다.

4	31	7	2
	28	6	
3	3	1	
	3		
	0		

a_i	4	2		
s_i	1	0	1	-2
t_i	0	1	-4	9

■ 공통 22번 문항

※ 문항 및 문항 분석

22번 문항

22. 두 양수 a, $b(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\boxed{\lim_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

22번 문항 풀이 (EBS 해설지)

$$\lim_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$\boxed{\sqrt{A^2}=|A|}$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\left(\sqrt{0+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$\boxed{\sqrt{A^2}=|A|}$

$\cdots$ ㉢

$$\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)^2(x+k)|}{(x+3)^2\times 2|g(t)|}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{|x+k|}{2|g(t)|}\quad\cdots\text{㉣}$$

$\boxed{|AB|=|A||B|}$

문항 분석

◆ **<보기>에 주어진 극한 $\lim_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$ 은 지나치게 복잡함**

극한에 포함된 함수에는 무리식, 절댓값, 유리함수 등이 복합적으로 섞여 있는 복잡한 합성함수에 해당합니다.

◆ **함수의 극한과 관련된 교육과정 평가 방법 및 유의 사항 미준수**

함수의 극한과 관련된 교육과정 평가 방법 및 유의 사항에는 '함수의 극한과 연속에 대한 평가에서는 함수의 극한과 연속의 뜻과 성질에 대한 이해 여부를 평가하는 데 중점을 두고, 복잡한 합성함수의 절댓값이 여러 개 포함된 함수와 같이 지나치게 복잡한 함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다'라고 명시되어 있습니다.

◆ **$|AB|=|A|\times|B|$, $\sqrt{A^2}=|A|$는 교육과정을 벗어나는 내용**

EBS 해설지에 제시된 문항 풀이 과정에서 고교 교과서나 교육과정에 정의되어있지 않은 절댓값과 관련된 성질 $|AB|=|A|\times|B|$, $\sqrt{A^2}=|A|$을 증명 없이 무분별하게 사용하고 있습니다.

◆ **오답률 98% (EBS 제공)**

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정)

2015 개정 교육과정 <수학Ⅱ>교과의 함수의 극한 단원의 평가 방법 및 유의 사항

- 함수의 극한과 연속에 대한 평가에서는 함수의 극한과 연속의 뜻과 성질에 대한 이해 여부를 평가하는 데 중점을 두고, 복잡한 합성함수나 절댓값이 여러 개 포함된 함수와 같이 지나치게 복잡한 함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다.

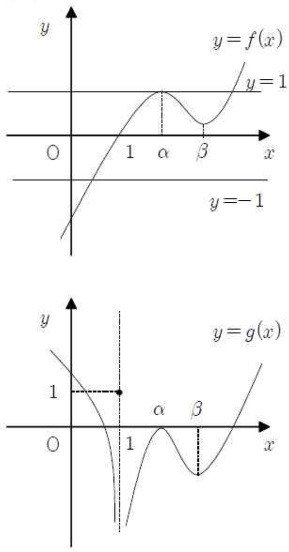
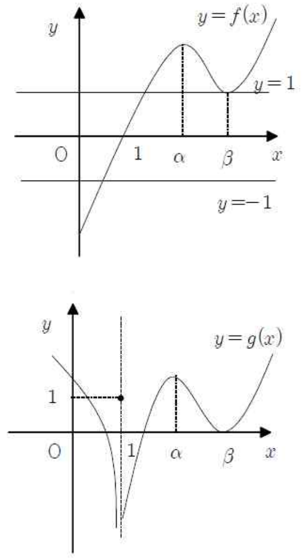
※ 오답률 88% (EBS 제공)

공통 20번 문항 오답률 (EBS 제공)

순위	문항 번호	오답률	배점	정답
1	22	98.0	4	19

■ 선택 <미적분> 28번 문항

※ 문항 및 문항 분석

미적분 28번 문항	미적분 28번 문항 풀이 (EBS 해설지)
28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 $$g(x)=\begin{cases}\ln\lvert f(x)\rvert & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$ 이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점] (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다. (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 함수 $\lvert g(x)\rvert$는 $x=2$에서 극소이다. (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다. ① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$	이때, 조건 (다)를 만족시키는 함수 $f(x)$의 그래프와 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다. (i)  (ii) 

문항 분석
◆ **함수 g(x)는 지나치게 복잡한 함수** <미적분> 28번 문항에 정의된 함수 $g(x)$는 정의역이 함수 $f(x)$로 구성되어 있을 뿐만 아니라 $f(x)\neq 0$일 때 함수 $g(x)$는 삼차함수 $f(x)$와 로그함수가 합성되어있는 복잡한 함수에 해당합니다. ◆ **도함수를 이용해 함수의 그래프 개형을 그리는 과정이 복잡 (교육과정 평가 방법 및 유의 사항 미준수)** 문제를 해결하기 위해서는 도함수를 활용하여 함수 문제에 주어진 조건을 만족하는 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$의 그래프 개형을 정확하게 그려야 합니다. 함수 $f(x)$는 삼차함수이며 최고차항 계수가 주어져 있어 그 개형을 그리기가 비교적 쉬우나 함수 $g(x)$는 $f(x)=0$에서 불연속이고 로그함수와 삼차함수의 합성함수로 정의되어있어서 그 개형을 판단하기가 어렵습니다. 또한 조건 (다)를 만족하도록 함수 $g(x)$의 그래프를 그리는 과정에서 그 유형이 2개로 나누어지므로 이 과정도 상당히 복잡합니다. 이것은 교육과정에 명시되어 있는 <수학Ⅱ>와 <미적분> 교과의 평가 방법 및 유의 사항을 벗어난 것으로 판단됩니다.

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정)

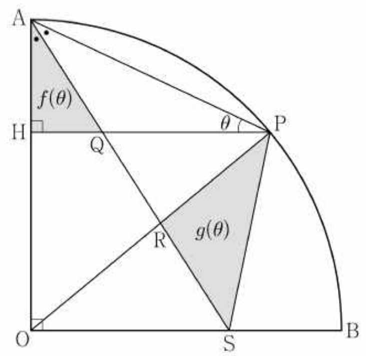
2015 개정 교육과정 <수학Ⅱ>, <미적분>에 관한 평가 방법 및 유의 사항
(다) 평가 방법 및 유의 사항 • 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그리거나 최댓값과 최솟값을 구하는 능력을 평가할 때, 지나치게 복잡한 함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다. (다) 평가 방법 및 유의 사항 • 여러 가지 미분법과 도함수의 활용에서 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

■ 선택 〈미적분〉 29번 문항

※ 문항 및 문항 분석

미적분 29번 문항

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, ∠OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH} = \theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)} = k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



29번 문항 풀이 (EBS 해설지)

$$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{AH}} \times \overline{\mathrm{HQ}}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sin^4 2\theta}{(1+\cos 2\theta)^2} \times \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

삼각형 AOP에서 각의 이등분선이 선분 OP와 만나는 점이 R이므로

$$\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{OR}} : \overline{\mathrm{RP}}$$

$$g(\theta) = \triangle \mathrm{OSP} - \triangle \mathrm{OSR}$$

$$= \frac{1}{2} \times \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) \times \frac{2\sin\theta}{2\sin\theta + 1}$$

문항 분석

◆ **삼각함수의 극한을 구하는 과정이 복잡 (교수학습 방법 및 유의 사항 미준수)**

삼각함수의 극한과 관련하여 <미적분> 교과의 교육과정 교수·학습 방법 및 유의 사항에서 '삼각함수의 극한은 삼각함수 $\sin x$, $\cos x$의 도함수를 구하는데 필요한 정도로 간단히 다룬다'라고 명시되어 있으나 본 문제의 풀이 (EBS 해설지)에서 함수 $f(\theta)$, $g(\theta)$는 삼각함수가 복합적으로 구성된 복잡한 함수여서 극한값을 구하는 과정이 단순하지 않습니다.

◆ **풀이 과정 중 '삼각형의 각이 이등분선의 성질' 활용함**

본 문항에 제시된 그림에서 삼각형AOP에서 선분AR은 각OAP의 이등분선임을 알 수 있습니다. 이를 이용해 $g(\theta)$를 구하는 과정에서 '삼각형의 각의 이등분선에 관한 성질(비례식)'을 이용하고 있습니다. '삼각형의 각의 이등분선에 관한 성질(비례식)'은 교육과정에 없는 내용입니다.

◆ **오답률 91%**

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정)

2015 개정 교육과정 <미적분> 교과의 미분법 단원의 교수·학습 방법 및 유의 사항

(나) 교수·학습 방법 및 유의 사항

- 삼각함수의 극한은 삼각함수 $\sin x$, $\cos x$의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.

※ 오답률 91% (EBS 제공)

2015 개정 교육과정 <미적분> 교과의 미분법 단원의 교수·학습 방법 및 유의 사항

순위	문항 번호	오답률	배점	정답
3	29	91.0	4	50

■ 선택 <미적분> 30번 문항

※ 문항 및 문항 분석

미적분 30번 문항

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5} g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-} g(t) \neq \lim_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

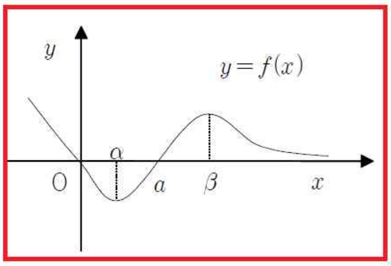
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30번 문항 풀이 (EBS 해설지)

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-ax}{e^x}=0}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은

다음과 같다.



문항 분석

◆ **함수 f(x)의 그래프를 그리는 과정이 지나치게 복잡함 (평가 방법 및 유의 사항 미준수)**

도함수를 이용해서 함수 f(x)를 그리는 것에 있어서 극값이 2개의 극값과 변곡점이 존재하고 함수의 그래프를 정확히 그리기 위해서는 x가 무한대로 갈 때 함수의 f(x)의 극한값을 구하는 것이 필수적입니다. 하지만 고교 교육과정에서 밑이 자연로그 e인 지수함수가 포함된 함수의 극한값을 구하기 위해서는 무리수 e의 정의($\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$)의를 사용해서 구하는 방법이 일반적이나 본 문제에 주어진 함수 $f(x)$의 분자가 이차함수로 되어 있어서 고교 교육과정에서의 무리수 e의 정의만으로는 극한값을 구하는 것은 어렵습니다. '지수함수가 다항함수보다 빠르게 증가한다'라는 사실을 안다면 그 극한값을 빠르게 계산할 수 있으나 이 사실은 고교 교육과정에서 다루지 않는 내용입니다. 지수함수의 극한과 관련해서 교육과정 평가 방법 및 유의 사항에는 '지수함수의 극한은 지수함수와 로그함수의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.'라고 되어 있으나 이문제는 이에 해당하지 않습니다. 또한 '도함수의 활용하여 함수 그래프 개형을 그리는 내용에서 지나치게 복잡한 함수는 다루지 않는다'라는 <수학Ⅱ> 교과의 평가 방법 및 유의 사항도 벗어난 것으로 판단됩니다.

◆ **오답률 95%**

※ 교육과정 근거 (2015 개정 교육과정)

2015 개정 교육과정 <수학Ⅱ>, <미적분>에 관한 평가 방법 및 유의 사항

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그리거나 최댓값과 최솟값을 구하는 능력을 평가할 때, 지나치게 복잡한 함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 여러 가지 미분법과 도함수의 활용에서 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

(나) 교수·학습 방법 및 유의 사항

- 지수함수와 로그함수의 극한은 지수함수 e^x와 로그함수 $\ln x$의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.

※ 오답률 95% (EBS 제공)

선택과목 <미적분> 번 문제 오답률 (EBS 제공)

순위	문항 번호	오답률	배점	정답
2	30	95.0	4	16

■ 선택 <기하> 28번 문항

※ 문항 및 문항 분석

미적분 30번 문항	30번 문항 풀이 (EBS 해설지)
28. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $A(c,0)$, $B(-c,0)(c>0)$에 대하여 $\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3,3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점] ① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$	두 양수 a, b에 대하여 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$이라 하자. 이 쌍곡선이 점 (3, 3)을 지나고 점 (3, 3)에서 직선 $y=2x-3$에 접할 때, $\overline{PB}-\overline{PA}$는 최대이다. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (3, 3)에서

문항 분석

◆ 문제 주어진 조건만으로 쌍곡선을 유추하기는 어려움

문제에는 쌍곡선이라는 용어가 나오지 않음에도 불구하고 문제에 주어진 조건인 'A(c,0), B(-c,0)에 대하여 $\overline{FB}-\overline{FA}$'라는 조건만으로 해당 문제를 쌍곡선과 연관 지어 풀이하는 과정은 지나치게 비약적인 유추의 과정에 해당합니다. 또한 풀이 과정(EBS해설지)에 '이 쌍곡선이 점(3,3)을 지나고 (3,3)에서 직선에 접할 때 최대가 된다.'라는 것은 고교 교육과정에서 다루지 않는 내용에 해당합니다.

교육과정에 제시되어있는 쌍곡선에 대한 성취기준에는 '쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.' '이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다'라고 명시되어 있는데 본 문항은 쌍곡선이라는 사실을 인지하지 못한 채 문제에 조건만으로 쌍곡선임을 유추하여 푸는 문제에 해당하므로 교육과정 성취기준에 부합한 문제라고 볼 수 없습니다.

※

2015 개정 수학과 교육과정 <기하> 교과의 '이차곡선' 단원의 성취기준
[12기하01-03] 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.
[12기하01-04] 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

※ 고등학교 <기하> 교과서

이차곡선 단원의 쌍곡선에 대한 정의 (교학사- 고등학교 <기하> 교과서)
쌍곡선의 방정식(1) 두 초점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$으로부터의 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $c>a>0$, $b^2=c^2-a^2$)