대학별 고사 문항 분석 기준
① 교육과정 성취기준 또는 평가기준에 명시된 사항을 벗어난 경우
② 교육과정 성취기준 또는 평가기준에 명시되지 않은 내용을 출제한 경우
③ 대학과정의 내용이 포함되어 출제된 경우

서울 15개 대학의 2023학년도 대학별 고사 논술·구술전형 자연계열 수학 문제 중 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문제의 판정 근거

대학		전형	해당 문제		교육과정을 벗어난 문제에 대한 구체적인 판정 근거	유형			문항수	비율 (%)
NO	대학명		문항 카드 번호	소문항 번호		①	②	③		
1	건국대	논술	3	5	• ‘가우스 기호’의 사용(대학과정 내용)			○	1	10
2	경희대	논술	·	·	·	·	·	·	0	0
3	고려대	구술 면접	7	2	• ‘멱집합 개념과 기호’의 사용(대학과정 내용)			○	1	20
4	동국대	논술	8	2	• ‘이산확률변수의 기댓값과 분산의 극한’ (교육과정 성취기준/평가기준 벗어남)	○			2	28.6
			9	3-(1)	• ‘계차수열’을 이용하여 수열의 일반항을 구함. (이전 교육과정 학습 내용이 포함됨)		○			
5	서강대	논술	6	2-2	• ‘절댓값이 있는 삼각함수’의 미분가능성 (교육과정 평가 방법 및 및 유의 사항 벗어남)	○			2	12.5
			7	1-2	• 도형의 방정식과 관련한 복잡한 계산 포함 (교육과정 평가 방법 및 유의 사항 벗어남)	○				
6	서울대	면접 구술	1A	1-1	• 세 번 합성한 함수의 그래프 그리기 (교육과정 성취기준/평가방법 벗어남)	○			10	76.9
				1-2		○				
				1-3		○				
			1B	1-1		○				
				1-2		○				
				1-3		○				
			문제 2	2-1	• 새로운 용어인 ‘뒤집기 수열’을 정의함.		○			
				2-2			○			
				2-3			○			
				2-4			○			
7	서울시립대	논술	II	4	• 부등식에 관한 ‘수열의 합(Σ)’과 ‘적분’의 성질 (대학과정 내용)			○	1	10
8	성균관대	논술	8	2-iv	• 교육과정을 벗어난 ‘연립이차방정식’의 풀이 (교육과정 교수 학습 방법 벗어남)	○			5	25
		논술	9	3-III	• $\mathrm{R_n}$, s_n, P_n, Q_n 기호로 인해 풀이가 복잡함. (교육과정 교수·학습 방법 및 유의사항 벗어남)	○				
		논술	10	1-II	• 경우의 수를 구하는데 과정이 지나치게 복잡함. (교육과정 평가 방법 및 유의 사항 벗어남)	○				
		논술	12	3-II	• $\lvert\lim_{h\to c} f(x)\rvert = \lim_{h\to c}\lvert f(x)\rvert$(대학과정 내용)			○		
		논술	12	3-III	• 절댓값이 포함된 함수 $A(t)$의 그래프 그리기 • ‘삼차함수의 대칭성’ 이용함. (고등학교 교유과정에서 다루지 않는 내용)		○			

대학		전형	해당 문제		교육과정을 벗어난 문제에 대한 구체적인 판정 근거	유형			문항수	비율 (%)
NO	대학명		문항 카드 번호	소문항 번호		①	②	③		
9	숙명여대	논술	5	1-1	• ‘함수방정식’ (대학과정 내용)			○	5	83.3
		논술	5	1-2	• ‘분수방정식’ 이용			○		
		논술	5	2-1	• ‘수열의 점화식’ 내용 포함 (교육과정 교수·학습방법 및 유의 사항 벗어남)	○				
				2-2	• ‘수열의 점화식’ 내용 포함 (교육과정 교수·학습방법 및 유의 사항 벗어남)	○				
		논술	5	3-1	• ‘볼록함수’ (대학과정 내용)			○		
10	연세대	논술	3	1-2	• ‘표준분해’에 따른 약수의 개수, ‘제곱수’ (대학과정 내용)			○	8	80
		논술	3	1-3	• 세 사건 이상에서의 독립사건을 다룸 (교육과정 평가 방법 및 유의 사항 벗어남)	○				
		논술	4	2-1	<제시문은 대학과정 ‘측도론’의 내용과 동일함> • 공집합의 길이는 0이다 (대학과정 내용) • $\min(a,b)$ 기호 표현(대학과정 내용)			○		
		논술		2-2	<제시문은 대학과정 ‘측도론’의 내용과 동일함> • 공집합의 길이는 0이다 (대학과정 내용) • $\min(a,b)$ 기호 표현(대학과정 내용)			○		
		논술		2-3	• $\min(a,b)$ 기호 표현(대학과정 내용)			○		
		논술		2-4	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○			
		논술	5	3-1	• ‘자취’의 개념으로 ‘타원(이차곡선)’을 도입함. (교육과정 교수·학습 방법 및 유의사항 벗어남)	○				
		논술		3-3	• 두 원의 위치관계 다룸 (이전 교육과정 내용)		○			
11	이화여대	논술	7	1-(1)	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○		7	70
		논술		1-(2)	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○			
		논술		1-(3)	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○			
		논술		1-(4)	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○			
		논술	8	2-(1)	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○			
		논술		2-(2)	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○			
		논술		2-(3)	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○			

대학 NO	대학명	전형	해당 문제: 문항 카드 번호	해당 문제: 소문항 번호	교육과정을 벗어난 문제에 대한 구체적인 판정 근거	유형 ①	유형 ②	유형 ③	문항수	비율
12	중앙대	논술	8	2-2	• ‘함수 방정식’ (대학과정 내용)			○	4	40
		논술	9	3-1	• ‘삼각함수의 일반각’ (대학과정 내용)			○		
		논술	14	2-2	• 복잡한 미분과정 (교육과정 평가 방법 및 유의사항 벗어남)	○				
		논술	15	3-2	• 복잡한 음함수 표현, 복잡한 음함수 미분 (교육과정 교수·학습 방법 및 유의사항 벗어남)	○				
13	한국외대	논술	5	7	• ‘절댓값이 포함된 함수’의 그래프 그리기 (교육과정 밖의 내용)		○		2	20
		논술		9	• ‘이항연산’ (대학과정 내용)			○		
14	한양대	논술	7	1-3	• 부등식에 관한 “적분’의 성질 (대학과정 내용)			○	3	16.7
		논술	8	2-3	• ‘수열의 합(Σ)‘의 기호표현 $\sum_{k=0}^{\frac{n}{3}} {}_nC_k$ • 부등식에 관한 ‘수열의 합(Σ)’의 성질 (대학과정 내용)			○		
		논술	9	1-3	• ‘이항계수의 대칭성’(교육과정 성취기준 벗어남))	○				
15	홍익대	논술	5	1-(3)	• (3)문항은 대학교재의 연습문제와 동일한 문제임.			○	15	53.5
		논술	6	2-(1)	• 새로운 용어 ‘n번 반복 코드’ 정의함.		○			
		논술		2-(2)			○			
		논술		2-(3)			○			
		논술	7	3-(1)	• 제시문은 밀도와 질량에 대한 이중적분 내용 (대학과정 내용) • ‘가우스 기호’의 사용(대학과정 내용) • m_k, M_k 기호 사용(대학과정 내용)			○		
		논술		3-(2)				○		
		논술		3-(3)				○		
		논술		3-(4)				○		
		논술	9	2-(1)	• 함수열 기호 표현 $y_1(t)$, $y_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ (대학과정 내용)			○		
		논술		2-(2)				○		
		논술		2-(3)				○		
		논술	10	3-1	• 제시문은 ‘지수분포’ 내용 (대학과정 내용) • $P(A_n)$ 기호 표현(대학과정 내용)			○		
		논술		3-2				○		
		논술		3-4	• 서로 독립인 n개의 사건을 다룸 (교육과정 평가 방법 및 유의 사항 벗어남)	○				
		논술		3-5	• 서로 독립인 n개의 사건을 다룸 (교육과정 평가 방법 및 유의 사항 벗어남)	○				
총 계						21	19	26	66	35.7

※ 각 대학별 출제 문제 중 고등학교 교육과정을 벗어난 문제로 판정된 것만 표로 정리하였습니다.

※ 위 표 항목 중 ‘비율(%)’은 각 대학별 ‘교육과정을 벗어난 문제 수’를 각 대학별 ‘총 출제 문항‘으로 나눈 값입니다

※ 서울 15개 대학에서 출제한 2023학년도 자연계열 논·구술전형 수학 문제의 전체 문항 수는 185개입니다.

1. 건국대학교

▶ 건국대학교 - KU논술우수자전형 - 자연계A(수학) - 문제 5번

문항 및 제시문	[제시문5 - (가)/(나)], [문제 5번]

제시문 5

(가) 실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내자.

예를 들어 $[4]=4$이고 $\left[\frac{21}{5}\right]=4$이다.

(나) 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$은 다음과 같이 정의한다.

$$f(n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{10^k}\right]$$

예를 들어, $f(123)=\left[\frac{123}{10}\right]+\left[\frac{123}{10^2}\right]+\left[\frac{123}{10^3}\right]+\cdots=12+1+0+\cdots=13$이다.

[문제 5]

(나)에서 정의된 함수 $f(n)$을 이용하여 함수 $g(n)$을 다음과 같이 정의한다.

$$g(n)=f(10n)-10f(n)$$

다음을 만족하는 자연수 n의 개수를 구하고 풀이 과정을 쓰시오.

$$g(n)=8,\quad 1\le n\le 6200$$

대학과정 내용	대학 수학 교재 『정수론』 - 가우스 기호

정의 1.4.4 실수 x에 대하여, x 보다 작거나 같은 정수 중에서 가장 큰 정수를 x의 **정수부분**(integral part)이라 하고 이것을 $[x]$로 나타낸다.

정리 2.2.10 정수 $n\ (\ge 2)$의 계승 $n!=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n$과 素數 p에 대하여 $p^e \| n!$인 지수 e를 $E(p,n)$으로 나타내면 다음이 성립한다.

$$E(p,n)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$$

- [제시문5]의 (가)와 (나)에는 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 **'가우스 기호([])'** 가 소개되어 있습니다. '가우스 기호([])' 는 대학 수학 교재 『정수론』에서 다루는 내용입니다.
- [제시문5]의 (나)에는 수열의 합(Σ)과 가우스 기호([])가 함께 사용되어 있는데 여기에서 사용된 수식은 고등학교 교육과정에서 다루는 내용이 아니며 대학 수학 교재 『정수론』(정리2.2.10)에서 다루는 내용과 유사합니다. [문제5]는 [제시문5]의 (나)를 이용하여 해결해야 하는 문제이므로 [문제5]는 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어나 출제된 문항으로 판정됩니다.

2. 고려대학교

▶ 고려대학교 - 수시모집 일반전형 - 자연계열(오전) - 2번

문항 및 제시문 [제시문(나),(다)], [문제 2번]

(나) 주어진 기준에 의하여 그 대상을 분명하게 알 수 있는 것들의 모임을 집합이라 하고 대상이 되는 하나하나를 그 집합의 원소라고 한다. 집합 A의 원소가 유한개일 때, 집합 A의 원소의 개수를 기호 $n(A)$로 나타낸다. 이때 집합 A의 부분집합들의 모임을 P라 하면 다음이 성립한다.

$$n(P)=2^{n(A)}$$

(다) 두 사건 B, C에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 m이고 그 각각에 대하여 사건 C가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 B, C가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m\times n$이다.

2. '문항 1'의 개념과 제시문 (다)를 모두 활용하여 제시문 (나)의 수학적 명제를 설명하시오.

대학과정 내용 대학 수학 교재 『위상수학』 - 멱집합, 부분집합의 원소의 개수 증명

$A\subseteq B$이면서 $A\neq B$이면 A를 B의 **진부분집합**이라고 부른다. 집합 A의 부분집합들을 모두 모은 집합을 A의 **멱집합**(power set)이라고 부르며 $\wp(A)$로 나타낸다.

[정리 1.3] 원소가 n개인 집합 A의 멱집합 $\mathscr{P}(A)$의 원소는 2^n개다.

증명 $A=\phi$인 경우 분명히 정리는 참이다.

$A\neq\phi$인 경우 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$으로 놓는다. A의 하나의 원소 a_k에 대하여 A의 각 부분집합으로서는 두 가지 가능성, 즉 a_k가 속하는 경우와 속하지 않는 경우가 있다. 그러므로 A의 부분집합의 수를 구하는 문제는 n개의 빈 칸 □□□⋯□의 각각에 0, 1 중에서 무작정 하나씩을 택하여 채우는 일로 바꿔 생각할 수 있다. 왜냐하면 이러한 n개의 빈 칸을 채우는 각 경우에 대하여 A의 부분집합 X가 하나씩 정해지기 때문이다. 즉 $a_k\in X$이면, 그리고 그 때에만 k번째의 빈 칸에 1이 나타난다. 그런데 빈 칸을 채울 수 있는 경우는 꼭 서로 다른 2^n가지 있으므로 A의 부분집합의 수는 바로 2^n이다. □

2015 개정 수학과 교육과정 『수학』 '집합' - 학습 요소(기호 표현)

(가) 학습 요소

- 집합, 원소, 공집합, 부분집합, 진부분집합, 벤 다이어그램, 합집합, 교집합, 전체집합, 여집합, 차집합, (집합의) 서로소, (집합의) 교환법칙, (집합의) 결합법칙, (집합의) 분배법칙, 드 모르간의 법칙, 명제, 가정, 결론, 정의, 정리, 증명, 조건, 진리집합, 부정, 역, 대우, 충분조건, 필요조건, 필요충분조건, 귀류법, 절대부등식, $a\in A$, $b\notin B$, $\varnothing$, $A\subset B$, $A\not\subset B$, $A=B$, $A\neq B$, $A\cup B$, $A\cap B$, U, A^C, $A-B$, $n(A)$, $\sim p$, $p\rightarrow q$, $p\Rightarrow q$, $p\Leftrightarrow q$

- [2번 문항]은 '경우의 수의 곱의 법칙[제시문(다)]'을 이용해 '집합 A의 부분집합의 수가 $2^{n(A)}$임[제시문(나)]'을 증명하는 문제입니다. 하지만 **부분집합의 개수와 관련된 명제를 증명하는 것은 대학 수학 교재 위상수학』에서 다루는 내용**으로 고교 교육과정에서 다루는 내용이 아닙니다. 또한, [제시문(나)]에서 집합 A의 부분집합들의 모임을 P라고 정의하는 것은 대학 수학 교재 위상수학』에서 다루는 **'멱집합(Power set)'과 동일한 개념**에 해당합니다.

3. 동국대학교

▶ 동국대학교 - 수시모집 논술전형 - 자연계열 - 문제2

문항 및 제시문 [문제2]

[문제2] 이산확률변수 X의 확률질량함수 $\mathrm{P}(X)$가 다음과 같이 정의되었다고 가정할 때, $\boxed{\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}(X)\text{와 } \lim_{n\to\infty}\mathrm{V}(X)}$를 구하시오.

2015 개정 수학과 교육과정 『확률과 통계』'통계' - 성취기준

[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

2015 개정 수학과 교육과정 평가기준 『확률과 통계』'통계' - 평가기준

[12확통03-02] 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.	상	이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	간단한 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.
	하	확률분포표가 주어진 이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.

- [문제2]는 이산확률변수 X 의 기댓값(E(X))와 분산(V(X))의 극한값을 구하는 문제에 해당합니다. 하지만 고등학교 수학 선택과목인 『확률과 통계』**의** 교육과정 성취기준에는 '*이산확률변수의 기댓값(평균)과 표준편차를 구할 수 있다.*' 로 제시되어 있어 **이산확률변수의 극한값을 구하는 것은 교육과정 성취기준의 수준을 벗어나는 내용**에 해당합니다.
- [문제2]에 있는 것과 같이 이산확률변수 X 의 **기댓값(E(X))와 분산(V(X))의 극한값을 구하는 문제**는 교육과정 평가기준 상/중/하의 어느 수준에도 포함되지 않는 문제입니다. 따라서 [문제2[는 교육과정 성취기준과 평가기준의 범위와 수준을 벗어나 출제된 문항으로 판정됩니다.

▶ 동국대학교 - 수시모집 논술전형 - 자연계열 - 문제3

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제3-(1)], [예시 답안]

[문제3] 시각 $t=0$일 때 좌표평면 상의 원점 O에서 (a, b)의 속도로 쏘아올린 물체 M은 다음과 같은 규칙에 따라 움직인다. (단, a와 b는 상수이고, $a>0$, $b>0$이다.)

■ M은 크기를 무시할 수 있을 만큼 아주 작으며, 시각 t에서 M의 위치가 함수 $x=x(t)$, $y=y(t)$로 나타내어질 때 항상 $x(t)\geq 0$, $y(t)\geq 0$이다.

■ $y(t)>0$인 시각 $t>0$에서는 항상 M의 가속도는 $(0, -g)$이다. (단, g는 상수이고, $g>0$이다.)

■ M이 x축에 충돌하는 시각을 순서대로 $t=t_1, t_2, \cdots$ $(0<t_1<t_2<\cdots)$라 할 때, 각각의 충돌 시각 $t=t_n$에 대해 충돌 전후 M의 속도의 x성분은 변화가 없고, 충돌 직후 M의 속도의 y성분은 충돌 직전 M의 속도의 y성분의 $-\dfrac{1}{2}$배이다.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} t_n$의 값을 구하시오.

이와 유사한 방법으로 계산하면 $t_2-t_1=\dfrac{b}{g}$, $t_3-t_2=\dfrac{b}{2g}$, …을 얻게 되어 귀납적 추론에 의해 $t_1=\dfrac{2b}{g}$, $t_2-t_1=\dfrac{b}{g}$, $t_3-t_2=\dfrac{b}{2g}$, …, 즉 첫째항이 $\dfrac{2b}{g}$이고 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열임을 알 수 있다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{2b}{g}+\frac{b}{g}+\frac{b}{2g}+\cdots = \frac{2b}{g}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4b}{g}$$

2007 개정 수학과 교육과정 『수학 I』 '수열' - 용어와 기호

<용어와 기호> 수열, 항, 유한수열, 무한수열, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 계차수열, 점화식, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, 알고리즘,

2015 개정 수학과 교육과정 『수학 I』 '수열' - 용어와 기호

(가) 학습 요소

- 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, a_n, $\{a_n\}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$

- [문제3-(1)]에 주어진 수열 t_n의 일반항을 구하기 위해서는 현 2015 개정 수학과 교육과정에서 다루지 않는 **'계차수열'** 의 개념을 이용해야 합니다. '계차수열' 과 관련된 개념은 이전 교육과정인 2007 개정 수학과 교육과정의 『수학 I』교과에서 다루었던 내용이지만 현 교육과정에서는 삭제된 내용입니다. 따라서 본 문항은 이전 교육과정의 내용의 개념을 이용하고 있으므로 교육과정을 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

4. 서강대학교

▶ 서강대학교 - 논술(일반)전형 - 자연계열 1차 2번 - 2-2문제

문항 및 제시문, 예시 답안	[2-2문제], [2-2 예시 답안]

【2-2】 제시문 [나]를 이용하여, 위 문항 【2-1】에서의 함수 $S(t)$가 미분가능하지 않은 실수 t의 값을 모두 구하시오. (단, $-\sqrt{2\pi} < t < \sqrt{2\pi}$)

【2-1】 $S(t) = |\sin(t^2)|$

【2-2】 t가 $-\sqrt{\pi} < t < 0$ 또는 $0 < t < \sqrt{\pi}$일 때 $S(t) = \sin(t^2)$이므로, 미분가능한 두 함수 $\sin t$와 t^2의 합성함수인 $S(t)$는 미분가능하다. t가 $-\sqrt{2\pi} < t < -\sqrt{\pi}$ 또는 $\sqrt{\pi} < t < \sqrt{2\pi}$일 때, $S(t) = -\sin(t^2)$이므로, 미분가능한 두 함수 $-\sin t$와 t^2의 합성함수인 $S(t)$는 미분가능하다. 제

2015 개정 수학과 교육과정	『수학Ⅱ』 성취기준 / 평가 방법 및 유의 사항

[12수학Ⅱ02-03] 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 미분가능성과 연속성의 관계에 대한 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

2015 개정 수학과 교육과정 교수·학습 안내자료	'미분가능성'에 대한 복잡한 문항 예시

이 문항은 주어진 여러 개의 함수 중에서 미분가능한 함수를 찾는 문제이다. 주어진 함수들이 합성함수인 경우, 합성함수의 실수배로 주어진 함수인 경우, 두 함수의 합으로 주어진 함수인 경우들로서 복잡하고, 이들 복잡한 함수들이 다시 x 값의 범위에 따라 2개의 식으로 분리되어 주어진 함수들의 미분가능성을 판단해야 한다. 이로 인해 두 연속함수의 합성함수와 두 연속함수의 합으로 주어진 함수는 연속함수임을 이해하고 함수의 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하고 있는 학생이라 하더라도 주어진 함수의 식의 복잡성으로 인해 이 문제를 해결하지 못할 가능성이 크다. 이와 같이 성취기준에의 도달 여부를 판단하기에 지나치게 복잡한 함수의 식을 포함하는 문제는 지양한다.

- [2-2문제]는 함수 $S(t)$의 미분가능성을 조사하는 문제에 해당합니다. 함수 $S(t)$는 앞선 문제인 [2-1문제]에서 구한 결과에 따라 $S(t) = |\sin(t^2)|$임을 알 수 있습니다. 하지만 주어진 **함수 $S(t)$는 삼각함수와 다항함수의 합성함수와 절댓값이 포함되어 있는 복잡한 함수에 해당**합니다. 또한, 함수 $S(t)$가 미분가능하지 않은 점을 찾기 위해서 절댓값의 부호가 양수와 음수인 경우를 나누어 각각의 경우에 따라 삼각함수의 극한과 무리함수의 극한을 계산해야 합니다. 이러한 문제는 두 연속함수의 합성함수가 연속함수임을 알고 함수의 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하고 있는 학생이라 하더라도 **복잡한 계산과정**으로 인해 교육과정 성취기준인 '*미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.*' 의 도달 여부 판단하기 어려운 문항에 해당합니다.

▶ 서강대학교 - 논술(일반)전형 - 자연계열 2차 1번 - 1-2문제

문항 및 제시문, 예시 답안 [1-2문제], [예시 답안]

【1-2】 $\beta=\frac{\pi}{3}$일 때 위의 조건을 만족하는 원들의 중심을 모두 지나는 직선의 방정식을 구하시오. 그리고 이 직선의 방정식과 제시문 **[가]**를 이용하여 x축, 직선 s, $y=\frac{5}{12}x$로 이루어진 삼각형에 내접하는 원의 반지름을 구하시오.

원의 중심과 직선 $5x-12y=0$의 거리는 제시문 **[가]**에 의해 $\frac{1}{13}\left|5\left(1-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)-12b\right|$이다. 이 거리와 원의 반지름의 길이가 같을 때 직선이 원에 접하므로, $13b=\left|5\left(1-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)-12b\right|$이다. $5\left(1-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)-12b<0$이면 $b=\frac{25\sqrt{3}+15}{22}$이고 이때 원의 중심의 x좌표가 $a=1-\frac{b}{\sqrt{3}}=1-\frac{25\sqrt{3}+15}{22\sqrt{3}}<0$이므로 x축, 직선 s, $y=\frac{5}{12}x$로 이루어진 삼각형의 내접원이 될 수 없다. $5\left(1-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)-12b>0$이면 $b=\frac{15-\sqrt{3}}{74}$이고 반지름의 길이는 $r=\frac{15-\sqrt{3}}{74}$이다. 따라서 x축, 직선 s, $y=\frac{5}{12}x$로 이루어진 삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이는 $r=\frac{15-\sqrt{3}}{74}$이다.

2015 개정 수학과 교육과정 『수학』 평가 방법 및 유의 사항

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 도형의 방정식은 도형을 좌표평면에서 다룰 수 있음을 이해하는 수준에서 다루고, 계산이 복잡한 문제는 다루지 않는다.

- [1-2문제]는 주어진 조건을 만족하는 원의 반지름을 구하는 문제입니다. 원의 반지름을 구하는 과정에서 점과 직선사이의 거리, 원과 직선의 위치관계를 이용해야 합니다. 풀이하는 과정 중에 복잡한 무리식의 계산, 무리수와 실수의 대소비교, 절댓값의 부호에 따라 2가지 경우로 나누어서 만족하는 경우를 찾아야 합니다. 또한 결과적으로 구한 반지름의 길이도 복잡한 무리수의 형태를 취하고 있습니다. 이 문항은 **상당히 복잡한 계산과정을 포함**하고 있어 학생들로 하여금 계산 실수를 유도하기 쉬운 문제입니다. 이러한 계산력 배양을 위한 문제로는 학생들의 성취수준을 올바르게 판단할 수 없습니다. 뿐만 아니라 교육과정 평가 방법 및 유의 사항에서도 ‘*도형의 방정식은 계산이 복잡한 문항은 다루지 않는다.*’ 라고 명시하고 있어서 본 문항은 교육과정의 범위와 수준을 벗어나 출제된 문항으로 판단할 수 있습니다.

5. 서울대학교

▶ 서울대학교 - 면접 및 구술고사 - 수학 1_A / 수학 1_B - 문제1(1-1, 1-2, 1-3)

문항 및 제시문, 예시 답안 [1-1문제, 1-2문제, 1-3문제]

1-1. $a=1$일 때, 합성함수 $g(g(g(x)))$가 미분가능하지 않은 점의 개수를 구하시오.

1-2. 다음 네 가지의 경우

$$a \le 0,\quad 0 < a \le \frac{1}{2},\quad \frac{1}{2} < a < 1,\quad 1 < a$$

각각에 대하여 함수 $y=g(g(g(x)))$의 그래프의 개형을 그리시오. 또한, 모든 미분가능하지 않은 점에서의 함숫값이 (i) 0보다 크거나 작거나 같은지, (ii) a보다 크거나 작거나 같은지 설명하시오. (미분가능하지 않은 점의 좌표를 서술할 필요 없음.)

1-3. 다음 등식이 성립하도록 하는 실수 a의 값을 모두 구하시오.

$$\int_0^1 g(g(g(x)))dx = \int_0^1 g(x)dx$$

2015 개정 수학과 교육과정 『수학』, 『수학 II』, 『미적분』 평가 방법 및 유의 사항

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 함수의 그래프와 그 성질에 대한 이해를 평가할 때 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 미분가능성과 연속성의 관계에 대한 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 여러 가지 적분법과 정적분의 활용에서 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

2015 개정 수학과 교육과정 교수·학습 안내자료 '미분가능성'에 대한 복잡한 문항 예시

이 문항은 주어진 여러 개의 함수 중에서 미분가능한 함수를 찾는 문제이다. 주어진 함수들이 합성함수인 경우, 합성함수의 실수배로 주어진 함수인 경우, 두 함수의 합으로 주어진 함수인 경우들로서 복잡하고, 이들 복잡한 함수들이 다시 x값의 범위에 따라 2개의 식으로 분리되어 주어진 함수들의 미분가능성을 판단해야 한다. 이로 인해 두 연속함수의 합성함수와 두 연속함수의 합으로 주어진 함수는 연속함수임을 이해하고 함수의 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하고 있는 학생이라 하더라도 주어진 함수의 식의 복잡성으로 인해 이 문제를 해결하지 못할 가능성이 크다. 이와 같이 성취기준에의 도달 여부를 판단하기에 지나치게 복잡한 함수의 식을 포함하는 문제는 지양한다.

- [1-1문제], [1-2문제], [1-3문제]를 풀기위해서는 함수 $g(x)$를 세 번 합성한 함수인 **합성함수** $g(g(g(x)))$**의 그래프**를 그릴 수 있어야 합니다. 하지만 고등학교 교육과정에서는 '합성함수의 그래프를 그릴 수 있다'와 같은 교육과정 성취기준은 존재하지 않습니다. [1-1문제]는 미분가능성을 판단하는 문제로 교육과정 평가방법 및 유의사항에 제시된 내용을 벗어납니다.(『수학 II』) [1-2문제]는 주어진 실수 a의 범위에 따라 함숫값을 비교해야 하여 경우의 수가 많아 학생들이 함수의 그래프의 성질을 알고 그 그래프를 이해하고 있는지 평가하는 문항으로 적절하지 않습니다(『수학』). [1-3문제]의 정적분의 값을 구하는 과정에도 함수자체가 복잡하여 그 계산과정이 지나치게 복잡합니다. (『미적분』)

▶ 서울대학교 - 면접 및 구술고사 - 수학 2 - 문제1(2-1, 2-2, 2-3, 2-4)

문항 및 제시문, 예시 답안 [1-1문제, 1-2문제, 1-3문제]

문제 2. 10원짜리, 100원짜리, 500원짜리 동전이 각각 하나씩 놓여있다. 차례로 동전을 한 개씩 뒤집는 작업을 통해 동전을 다음의 상태로 바꾸려고 한다.

(*) 3개의 동전이 모두 앞면이거나 모두 뒷면

동전을 뒤집을 순서를 차례대로 나열한 수열을 '뒤집기 수열'이라고 하자. 즉, '뒤집기 수열' $\{a_n\}$은 n번째에 a_n원짜리 동전을 뒤집는 것을 말하며 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 10, 100,

2-1. 모든 '뒤집기 수열'에 대해 1번 만에 3개의 동전이 (*) 상태로 바뀔 확률은 같다. 그 확률을 구하시오.

2-2. 2번 이내에 3개의 동전이 (*) 상태로 바뀔 확률을 최대로 만드는 '뒤집기 수열' 하나의 처음 두 개 항을 제시하고 그 최대의 확률을 구하시오.

2-3. n번 이내에 3개의 동전이 (*) 상태로 바뀔 확률이 1인 '뒤집기 수열'이 존재하도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.

2-4. 위에서 (*) 상태를 아래의 (**) 상태로 대체한다.

(**) 3개의 동전이 모두 앞면

도전자가 '뒤집기 수열'을 하나 제시하면, 심판이 3개의 동전을 (**) 상태가 아니도록 무작위로 놓은 후, 도전자가 제시한 '뒤집기 수열'에 따라 동전을 뒤집는다. 3개의 동전이 (**) 상태가 되면 뒤집기를 멈춘다. n번 이내에 3개의 동전이 (**) 상태로 바뀔 확률이 1인 '뒤집기 수열'이 존재하도록 하는 n의 최솟값을 구하시오.

선행교육 예방을 위한 교과별 안내자료 평가 시 유의 사항 - 새로운 용어 및 기호 사용

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음

- 정규 수업 시간에 지도한 내용이더라도 교육과정 밖의 내용은 출제할 수 없습니다. 이러한 내용은 문항 내에 단서 조건으로 명확히 제시하여도 출제하여 평가할 수 없습니다.
- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

• [문제2]의 제시문에 **새로운 용어인 '뒤집기 수열'을 정의**하고 있으며 [2-1문항], [2-2문항], [2-3문항], [2-4문항]은 새롭게 정의된 '뒤집기 수열'을 이용하여 해결해야하는 문제입니다. 하지만 '뒤집기 수열'은 본 문항에서 새롭게 정의된 용어로서 고등학교 교육과정에서 다루는 용어가 아닙니다. 또한 한국교육과정평가원에서 발표한 『선행교육예방을 위한 교과별 안내자료』에서도 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하여 출제하는 것을 지양해야 한다고 명시되어 있습니다. 따라서 본 문항은 교육과정의 범위와 수준을 벗어나 출제된 문항에 해당합니다.

6. 서울시립대학교

▶ 서울시립대학교 - 수시모집 논술전형 - 자연계열Ⅱ - 문제 4

문항 및 제시문, 예시 답안	[문제 4], [예시 답안]

[문제 4] (115점)
모든 자연수 n에 대하여 다음 부등식이 성립함을 보여라.

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\} \le \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$

즉, 닫힌구간 $[k, k+1]$에서 $f(x) \le \frac{1}{x} \le g(x)$이므로

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \le \int_k^{k+1} g(x)\,dx$$

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2} \le \ln(k+1)-\ln k \le \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$ 위의 부등식에 의하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}\right\} \le \ln(n+1) \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$$ 이 성립한다.

2015 개정 수학과 교육과정	『수학Ⅱ』, 『수학Ⅰ』 교육과정 성취기준

[12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

② 수열의 합
[12수학Ⅰ03-04] Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

대학과정 내용	대학 수학 교재 『해석학』 - 적분의 비교정리

따름정리 6.17 (적분의 비교정리) 함수 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$는 $[a, b]$에서 적분가능하고 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) \le g(x)$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

정리 7.2.3 양항급수의 비교 판정법
두 양항수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 유한 개를 제외한 모든 n에 대하여 $a_n \le b_n$을 만족시키고 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n$도 수렴한다.

- [문제4]에 제시된 부등식이 성립함을 보이기 위해서 [예시 답안]에서 이용된 '정적분과 부등식에 대한 성질' 과 **'수열의 합(시그마)과 부등식에 대한 성질' 은 고등학교 교육과정 성취기준을 벗어나는 내용**입니다. 고등학교 『수학Ⅰ』교과서에서는 '수열의 합(시그마)' 과 관련해 수열의 합과 차, 실수배에 관한 성질만 다루며 부등식과 관련된 성질($a_n \le b_n$이면 $\Sigma a_n \le \Sigma b_n$)은 다루지 않습니다. 또한 『수학Ⅱ』에서는 부정적분의 성질과 관련해서 함수의 합과 차, 실수배에 관한 성질만 다루고 있으며 적분의 부등식과 관련된 성질은 다루지 않습니다. 이러한 성질은 대학 수학 교재 '해석학' 에서 다루는 내용입니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정 성취기준을 벗어나 대학과정의 내용을 이해하고 있어야 하는 풀 수 있는 문항에 해당합니다.

7. 성균관대학교

▶ 성균관대학교 - 논술우수전형 - 자연계 1교시 - 문제 2번 - 문제 2-iv

문항 및 제시문, 예시 답안	[문제 2-Ⅳ], [예시 답안]
[문제 2-iv] <제시문 2>의 삼각형 ABC에 대해 $a=\sqrt{2}$라 하자. 2023 이하인 자연수 N에 대해, $\overline{AB}^2$과 $\overline{AC}^2$은 정수가 아니고 $\overline{AB}\times\overline{AC}=N$을 만족하는 순서쌍 $(\overline{AB}^2, \overline{AC}^2)$이 존재하는 모든 N의 합을 구하고 그 이유를 논하시오.	
[문제 2-ⅳ] 편의상 $x=\overline{AB}$, $y=\overline{AC}$라 두자. x, y 가 모두 지름보다 클 수는 없으므로 $xy \le 2\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=8$ 따라서 $N=1,2,\cdots,8$ 만 고려하면 된다. (1) $N=1$ 일 때: $xy=1$ 를 코사인법칙 $x^2+y^2-xy=6$ 에 대입하여 y를 소거하면 $x^4-7x^2+1=0$ 을 얻는다.	(2) $N=2$ 일 때 $X^2-8X+4=0$ (3) $N=3$ 일 때 $X^2-9X+9=0$ (4) $N=4$ 일 때 $X^2-10X+16=0$ (5) $N=5$ 일 때 $X^2-11X+25=0$ (6) $N=6$ 일 때 $X^2-12X+36=0$ (7) $N=7$ 일 때 $X^2-13X+49=0$ (8) $N=8$ 일 때 $X^2-14X+64=0$
2015 개정 수학과 교육과정	『수학』 교수·학습 방법 및 유의사항
• 미지수가 2개인 연립이차방정식은 일차식과 이차식이 각각 한 개씩 주어진 경우, 두 이차식 중 한 이차식이 간단히 인수분해 되는 경우만 다룬다.	

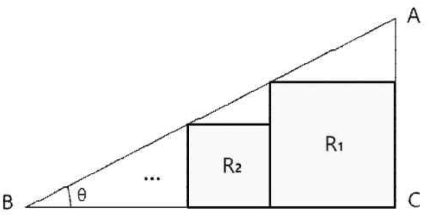
• [문제 2-iv]는 풀기위해서는 N이 자연수 일 때, 연립이차방정식 $\begin{cases} xy = \mathrm{N} \\ \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2-\mathrm{xy}=6 \end{cases}$ 을 풀어야 하며, 한 식을 다른 식에 대입하여 푸는 과정에서 4차 방정식이 만들어지며, 방정식의 근의 존재 유무를 확인하는 과정에서 $x^2=\mathrm{X}$로 지환하고 각각의 N의 따라 무려 8개의 이차방정식을 풀어야하기 때문에 **풀이과정이 지나치게 복잡**합니다. 연립이차방정식의 풀이와 관련해 고등학교 교육과정 교수・학습 방법 및 유의 사항에는 ‘*미 미지수가 2개인 연립이차방정식은 두 이차식 중 한 이차식이 간단히 인수분해 되는 경우만 다룬다.*’ 라고 되어 있습니다. 위 연립이차방정식에서 한 이차식이 간단히 인수분해 되지도 않으며, 그 풀이과정도 지나치게 복잡하기 때문에 본 문항은 교육과정 교수・학습 방법 및 유의사항을 벗어나 출제된 것으로 판정됩니다.

▶ 성균관대학교 - 논술우수전형 - 자연계 1교시 - 문제 3번 - 3-iii

문항 및 제시문, 예시 답안 [제시문 3], [문제 3-iii], [예시 답안]

<제시문 3>

삼각형 ABC는 $\angle \mathrm{ACB}=90^{\circ}$ 이고 $\angle \mathrm{ABC}=\theta$인 직각삼각형이다. 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내부에 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3, \cdots$을 계속해서 만들어 나간다. 이때, 정사각형 $\boxed{\mathrm{R}_n}$의 넓이를 $\boxed{s_n}$이라고 하자. 2 이상인 자연수 n에 대하여 이와 같이 정의된 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \cdots, \mathrm{R}_n$ 중에서, 모든 홀수 번째 정사각형의 넓이의 합을 $\boxed{P_n}$이라 하고 모든 짝수 번째 정사각형의 넓이의 합을 $\boxed{Q_n}$이라 하자. (단, 정사각형 R_1의 한 변의 길이는 1이다.)



[문제 3-iii] <제시문 3>에서 정의된 2023개의 정사각형 $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \cdots, \mathrm{R}_{2023}$ 중에서, 1012개의 홀수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\dfrac{P_{2023}}{1012}$과 1011개의 짝수 번째 정사각형의 넓이의 평균값 $\dfrac{Q_{2023}}{1011}$의 대소관계를 <제시문 1>의 수학적 귀납법과 [문제 3-ii]를 이용하여 판단하고, 그 이유를 논하시오.

이제 $p(k)$가 성립한다고 가정하자. 그러면, $\dfrac{P_{2k+1}}{k+1} > \dfrac{Q_{2k+1}}{k}$이 성립한다. 이때,

$$\begin{aligned}\frac{P_{2k+3}}{k+2}-\frac{Q_{2k+3}}{k+1} &> \frac{Q_{2k+3}}{k+2}\left(2-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}\right)-\frac{Q_{2k+3}}{k+1} \qquad \left(\because \frac{P_{2k+3}}{Q_{2k+3}}=\alpha+\frac{1}{\alpha}-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}>2-\frac{Q_{2k+1}}{P_{2k+1}}\right)\\ &= \frac{k\,Q_{2k+3}}{(k+2)P_{2k+1}}\left(\frac{P_{2k+1}}{k+1}-\frac{Q_{2k+1}}{k}\right)\\ &> 0\end{aligned}$$

이 성립하므로, $p(k+1)$이 성립함을 알 수 있다.

2015 개정 수학과 교육과정 『수학 Ⅰ』 교육과정 성취기준, 교수·학습 방법 및 유의사항

[12수학Ⅰ03-08] 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명할 수 있다.

(나) 교수·학습 방법 및 유의 사항

- 수학적 귀납법에 의한 증명은 원리를 이해할 수 있는 정도로 간단하게 다룬다.

- [제시문 3]에는 무려 4개의 **수열에 대한 기호**(R_n, s_n, P_n, Q_n)**가 새롭게 정의**되어 있으며, 수학적 귀납법을 이용해 [3-III]을 증명하는 과정에도 기호의 복잡성과 부등식의 성질 등, 복잡한 대수적인 식의 계산이 포함되어 있어 **그 계산 과정이 상당히 복잡**합니다. 이것은 학생들이 수학적 귀납법을 이용하여 명제를 증명하는 것에 방해 요소로 작용하게 됩니다. 뿐만 아니라 ‘*수학적 귀납법에 의한 증명은 원리를 이해라 수 있는 정도로 간단하게 다룬다.*’ 라고 명시되어 있는 교육과정 교수·학습 방법 및 유의 사항을 준수하지 못한 문항에 해당합니다.

▶ 성균관대학교 - 논술우수전형 - 자연계 2교시 - 문제 1번 - 문제 1-ii

문항 및 제시문, 예시 답안 [제시문 3], [문제 1-ii], [예시 답안]

<제시문3>

세 개의 정수로 이루어진 순서쌍의 집합 M을 다음과 같이 정의하자.

$$M=\{(a,\, b,\, c)\,|\, a,\, b,\, c\text{는 정수이고 } 1 \le |a|,\, |b|,\, |c| \le 100\}$$

이때, 집합 M의 원소의 개수는 200^3이다.

[문제 1 - ii] 삼각형의 세 변의 길이가 각각 100 이하의 자연수이면서 등비수열을 이루는 삼각형의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오. (단, 합동인 두 삼각형은 한 개의 삼각형으로 간주하며, $\sqrt{5}=2.236\cdots$이다.)

로, 어떤 자연수 A에 대해 $a=p^2A$임을 알 수 있다. 이때, 문제의 조건으로부터 $p^2 \le p^2A=a \le 100$를 얻게 되고 $p \le 10$을 얻을 수 있다. $p=10$인 경우, $a=100$이 되고 $b=ar>100$이 되어 가능하지 않다. 따라서, 가능한 p의 값은 다음과 같다.

$$2,3,4,5,6,7,8,9$$

각각의 p에 대해 $r=\dfrac{q}{p}<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$를 만족하고 $ar^2=Aq^2 \le 100$이 되는 q의 값을 구한 뒤, 각각의 순서쌍 (p,q)에 대해 자연수 A는 $1 \le A \le \dfrac{100}{q^2}$를 만족하므로, 가능한 A의 개수를 구하면 다음과 같다.

(p,q)	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,5)$	$(5,6)$	$(5,7)$	$(5,8)$
가능한 A의 개수	11	6	4	2	2	1
(p,q)	$(6,7)$	$(7,8)$	$(7,9)$	$(7,10)$	$(8,9)$	$(9,10)$
가능한 A의 개수	2	1	1	1	1	1

2015 개정 수학과 교육과정 『수학』 교육과정 평가 방법 및 유의 사항

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 경우의 수, 순열과 조합과 관련하여 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

- [제시문 3]에는 집합 M을 절댓값과 부등호, 쉼표가 혼합되어 있는 복잡한 형태의 조건제시법 형태로 표현되어 있습니다. 하지만 이러한 복잡한 형태로 제시된 집합의 표현 방법은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어나는 표현이며 학생들이 집합의 조건제시법에 대한 이해를 어렵게 만듭니다.
- [문제1-II]는 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 구하는 것이 핵심이지만 자연수의 성질과 부등식, 순서쌍을 다루는 등 **복잡한 계산 과정이 포함된 문항**입니다. 따라서 경우의 수와 관련된 교육과정 평가 방법 및 유의 사항을 준수하지 않은 문항으로 판정됩니다.

▶ 성균관대학교 - 논술우수전형 - 자연계 2교시 - 문제 3번 - 문제 3-ii

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 3-ii], [예시 답안]

[문제 3-ii] <제시문 1>에서 주어진 함수 $A(t)$를 a, b, c, d와 t를 사용하여 표현하고 그 이유를 논하시오.

$$A(t)=\lim_{h\to 0+}\frac{p(h)}{h}=\lim_{h\to 0+}\left|\frac{t}{2}\cdot\frac{f(t+h)-f(t)}{h}+\frac{f(t+h)}{2}-\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(x)dx\right|$$

을 얻는다. 도함수의 정의에 의해 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=f'(t)$이고 $f(x)$는 연속이므로 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)}{2}=\frac{f(t)}{2}$이다. 또한 $F(x)$를 $f(x)$의 한 부정적분이라 하면

$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h}f(x)dx=\lim_{h\to 0+}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}=F'(t)=f(t)$가 된다. 따라서

$A(t)=\left|\frac{t}{2}f'(t)+\frac{1}{2}f(t)-f(t)\right|=\frac{1}{2}|tf'(t)-f(t)|$을 얻는다.

대학과정 내용 대학 수학 교재 『해석학』 - 함수의 극한과 절댓값

14 $A\subseteq\mathbb{R}$, $f:A\to\mathbb{R}$라 하고 $c\in\mathbb{R}$를 A의 집적점이라 하자. $\lim_{x\to c}f$가 존재하고, $|f|$가 $x\in A$에 대하여 $|f|(x)=|f(x)|$으로 정의되는 함수이면, $\lim_{x\to c}|f|=\left|\lim_{x\to c}f\right|$임을 증명하여라.

- [문제 3-II]의 $A(t)$를 구하는 과정에서 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 극한과 절댓값에 대한 성질을 아무런 증명과정 없이 사용하고 있습니다. $|\lim_{h\to c}f(x)|=\lim_{h\to c}|f(x)|$**와 같은 극한의 성질**은 대학 수학 교재 『해석학』에서 다루는 내용에 해당합니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어나 대학과정의 내용을 다룬 문항으로 판정됩니다.

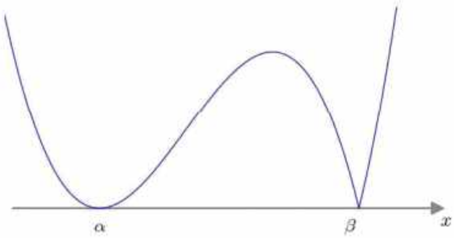
▶ 성균관대학교 - 논술우수전형 - 자연계 2교시 - 문제 3번 - 문제 3-ⅲ

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 3-III], [예시 답안]

[문제 3-ⅲ] <제시문 1>에서 주어진 함수 $A(t)$가 <제시문 2>의 조건을 만족할 때, α, β와 a의 값을 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 3-ⅲ] 편의상 $g(t)=\frac{1}{2}(tf'(t)-f(t))$라 하자. 그러면 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 이므로 $g(t)=at^3+\frac{b}{2}t^2-\frac{d}{2}$이다. 또한 $A(t)=|g(t)|$이므로 $A(t)=0$와 $g(t)=0$은 같은 근을 갖고 문제의

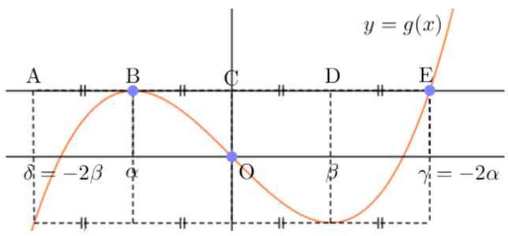
$y=A(x)$의 그래프는 아래와 같이 그려진다.



위의 $y=A(x)$의 그래프를 보면 $A(t)$는 유일한 극댓값을 가지고 이 극댓값은 $\alpha<t<\beta$ 범위에서 얻어지므로 $g(t)$은 이 범위에서 극솟값 -16을 갖는다. 이 극솟값은 $t=\frac{\alpha+2\beta}{3}=0$에서 얻어지므로

교육과정 밖의 내용 삼차함수의 대칭성 - 변곡점과 극점 사이의 비율

삼차함수의 그래프의 극대 (극소)인 점 A에서 그은 접선이 이 삼차함수의 그래프와 점 B에서 만날 때, 선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 x좌표가 극소 (극대)인 점의 x좌표와 같습니다. +) 선분 AB의 **1:2** 내분점은 변곡점입니다.



- [문제 3-Ⅲ]를 해결하기 위해서는 앞선 문제인 [문제 3-Ⅱ]에서 구한 절댓값이 포함된 삼차함수인 $A(t)$의 그래프를 그리는 것이 필수적입니다. 하지만 고등학교 교육과정에서는 **절댓값이 포함된 함수의 그래프를 그리는 것**은 관련 성취기준도 없을 뿐더러 해당되는 내용도 없습니다. 그 뿐만 아니라 함수 $A(t)$의 극솟값을 갖는 t의 값을 구하는 과정에서 교육과정에서 다루지 않는 **'삼각함수의 대칭성' 과 관련된 공식을 이용**하고 있습니다. 따라서 [문제 3-Ⅲ]은 고등학교 교육과정을 벗어난 내용을 이용하여 문제를 해결하고 있으므로 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문제라고 판정할 수 있습니다.

8. 숙명여자대학교

▶ 숙명여자대학교 - 논술우수자전형 - 자연계열 - 1-1/1-2

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 1-1] [예시 답안] / [문제 1-2] [예시 답안]

1-1. 양의 실수에서 정의된 함수 $f(x)$는 미분 가능하고, $f(x+1)=(x+1)f(x)$, $f(1)=1$을 만족시킨다. $f'(4)-9f'(2)-6f'(1)$의 값을 구하시오.

1-2. 함수 $f(u)$는 $f(u)=\int_0^1 x^u(1-x)^{10}dx$, $u\ge 1$이다. $u\ge 2$일 때, $f(u)=g(u)f(u-1)$인 $g(u)$를 구하고, $f(u+1)=\frac{1}{12}f(u-1)$인 u의 값을 구하시오.

이 관계식을 이용하면 $f(u+1)=\frac{(u+1)}{u+12}f(u)=\frac{(u+1)u}{(u+12)(u+11)}f(u-1)$이므로,

$\boxed{\frac{u(u+1)}{(u+11)(u+12)}=\frac{1}{12}}$을 만족시키는 u를 찾는다.

대학과정 내용 대학 수학 교재『함수방정식과 부등식 이론에 대한 소개』- 함수방정식

13.1 The remaining Cauchy equations

The following functional equations are also referred to as Cauchy's equations (Cauchy [41]; cf. also Aczél [5])

$$f(x+y)=f(x)f(y), \quad (13.1.1)$$
$$f(xy)=f(x)+f(y), \quad (13.1.2)$$
$$f(xy)=f(x)f(y). \quad (13.1.3)$$

대학과정 내용 대학 수학 교재『대학미적분학』- 분수방정식

▷ 유리방정식과 무리방정식

다음 방정식

$$\frac{x+1}{x-1}=0,\ \frac{2}{x-1}=\frac{1}{x+1},\ \frac{x^2-x}{x+1}=4$$

과 같이 분모에 미지수가 있는 분수식으로 이루어진 방정식을 분수방정식(fractional equation)이라고 하며, 일차방정식, 이차방정식과 같이 미지수에 대한 다항식으로 이루

- [1-1 문항]에 주어진 식 $f(x+1)=(x+1)f(x)$는 전형적인 **'함수방정식'** 형태의 식입니다. '함수방정식'은 고등학교 교육과정에서 다루는 내용이 아니며 대학 수학 교재『함수방정식과 부등식 이론에 대한 소개(An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities)』에서 다루는 내용에 해당합니다.
- [1-2 문항]에 있는 u값을 구하기 위해서는 [예시답안]에 제시되어 있는 **'분수방정식'** 을 풀어야 합니다. 하지만 '분수방정식' 은 고등학교 교육과정에서 다루는 내용이 아니며 대학 수학 교재『대학미적분학』에서 다루는 내용에 해당합니다. 따라서 [1-1 문항]과 [1-2 문항]은 모두 대학과정의 내용을 출제한 것으로 판정됩니다.

▶ 숙명여자대학교 - 논술우수자전형 - 자연계열 - 제시문(다) / 문제 1-1 / 문제 1-2

문항 및 제시문, 예시 답안 [제시문(다)], [문제 2-1], [문제 2-2]

<다> 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 수렴, 발산을 조사해보자.

$a_1 = 1$

$a_{n+1} = pa_n + q$ (단, p, q는 상수이고 $n = 1, 2, 3, \cdots$) …… ①

이 수열이 수렴하는 경우 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha$이므로 식 ①에서

$\alpha = p\alpha + q$ …… ②

이다.

이때 수열 $\{a_n\}$이 α로 수렴하는 것은 수열 $\{a_n - \alpha\}$가 0으로 수렴하는 것과 같다.

식 ①에서 식 ②를 빼면 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$이므로 수열 $\{a_n - \alpha\}$는 공비가 p인 등비수열이다.

따라서 p의 값에 따라 수열 $\{a_n\}$의 수렴 여부가 달라진다.

제시문 **<나>**에서 구한 점 P_n의 x좌표를 x_n이라 할 때 다음 문제에 답하시오.

2-1. $f(x) = 3x^2$에 대하여 점 $\mathrm{P}_1(1,3)$, $d = \frac{1}{5}$일 때, 수열 $\{x_n\}$을 귀납적으로 정의하시오.

2-2. $f(x) = 3(x^2 - x)$에 대하여 점 $\mathrm{P}_1(1,0)$일 때, 수열 $\{x_n\}$이 수렴하도록 하는 d의 값의 범위를 구하시오.

2007 개정 수학과 교육과정 『수학 I』 교육과정 용어와 기호

<용어와 기호> 수열, 항, 유한수열, 무한수열, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 계차수열, 점화식 귀납적 정의, 수학적 귀납법, 알고리즘, 순서도, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$, S_n

2015 개정 수학과 교육과정 『수학 I』 교수·학습 방법 및 유의 사항

- 수열과 관련된 여러 가지 문제를 귀납적으로 표현할 수 있게 하고, 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 문제는 다루지 않는다.

• [제시문(다)]에는 이전 교육과저에서 다루었던 **'수열의 점화식' 을 이용하여 귀납적으로 정의된 수열의 일반항**을 구하고 있습니다. 수열의 점화식과 이를 이용해서 수열의 일반항을 구하는 내용은 현 교육과정인 2015 개정에서 다루지 않으며 고등학교『수학 I』교과의 교수・학습 방법 및 유의사항에도 '*귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 문제는 다루지 않는다.*' 라고 명시되어 있습니다. [문제2-1]과 [문제2-2]는 [제시문(다)]의 내용을 바탕으로 해결해야하는 문제에 해당해 두 문항 모두 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항으로 판정됩니다.

▶ 숙명여자대학교 - 논술우수자전형 - 자연계열 - 제시문(마) / 문제 3-1

문항 및 제시문, 예시 답안 [제시문(마)], [문제 3-1], [예시 답안]

<마> 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 그래프가 위로 볼록이면 그 구간에 있는 n개의 점 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대하여 부등식 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \le f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ 가 성립한다.

여기서 등호는 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$일 때 성립한다.

3-1. 제시문 **<라>**의 원에 내접하는 n각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i)$임을 보이고 그 넓이의 최댓값을 구하시오.

따라서 구간 $(0, \pi)$에서 함수 $f(x) = \sin x$의 그래프는 위로 볼록이고

제시문 <마>에 의해 부등식 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin(2\theta_i) \le \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2\theta_i\right)$이 성립한다.

대학과정 내용 대학 수학 교재 『해석학』 - 볼록함수

볼록함수

볼록성의 개념은 많은 분야에서 중요한 역할을 하는데, 특히 최적화의 현대 이론에서 그러하다. 1변수인 볼록함수와 미분에 대한 그들의 관계를 간단히 고찰할 것이다. 기본적인 결과들을 적당히 수정하여 고차원 공간으로 확장할 수 있다.

6.4.5 정의 $I \subseteq \mathbb{R}$를 구간이라 하고 $f : I \to \mathbb{R}$라 하자. $0 \le t \le 1$을 만족하는 임의의 t와 I의 임의의 점들 x_1, x_2에 대하여

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$$

가 성립하면, f는 I에서 **볼록하다**(convex)고 한다.

Lemma 5.3.1. *Let $D \subset \mathbb{R}^N$ be a convex and open set. If $f : D \to \mathbb{R}$ is a convex function, then for every $n \in \mathbb{N}$ and for every $x_1, \ldots, x_n \in D$*

볼록 함수

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}. \qquad (5.3.3)$$

- [제시문(마)]에는 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 **'볼록함수'** 와 관련된 부등식이이 소개되어 있으며 [3-1문항]을 헬 해결함에 있어서 제시문(마)의 내용을 이용하고 있습니다. '볼록함수' 개념뿐만 아니라 제시문(마)에 있는 수열이 포함된 **'볼록함수에 대한 부등식의 성질'** 은 모두 대학 수학 교재 『해석학』에서 다루는 내용입니다. 따라서 [3-1문항]을 해결하기 위해서는 대학과정의 내용을 미리 알고 있어야 합니다. 따라서 [3-1문항]은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

9. 연세대학교

▶ 연세대학교 - 논술전형 - 자연계열(수학) - [문제 1-2]

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 1-2] [예시 답안]

[문제 1-2] 모든 전등이 처음에 꺼져있는 상태에서 수험번호가 1부터 2023까지의 학생이 연세로를 지나갔다. 2023명의 학생이 모두 지나간 후 켜져있는 전등 중에서 임의의 전등을 하나를 골랐을 때, 그 전등의 버튼이 총 세 번 눌러졌을 확률을 구하시오. **[5점]**

[문제1-2]

전등이 켜져 있기 위해서는 버튼을 홀수 번 눌러야 한다.

$n=1$인 경우 약수는 1개뿐이다. $n \ge 2$인 경우 $n = p_1^{k_1} \times \cdots \times p_m^{k_m}$으로 소인수분해 되면 약수의 개수는 $(k_1+1) \times \cdots \times (k_m+1)$이므로 약수의 개수가 홀수이려면 $k_1, \cdots, k_m$이 모두 짝수여야 하므로 n이 제곱수여야 한다.

대학과정 내용 대학 수학 교재『정수론』 - 표준분해, 약수의 개수, 제곱수

정수 n (≥ 2)를 다음과 같이 나타낸 것을 n의 **표준분해**라고 한다.

$$n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} \quad (p_1, p_2, \cdots, p_r \text{는 서로 다른 素數}, \ e_i \ge 1)$$

정리 2.4.2 양의 정수 m에 대하여 m의 양의 약수 전체의 개수와 m의 양의 약수 전체의 합을 각각 $\tau(m)$, $\sigma(m)$으로 나타낼 때 다음이 성립한다.

(1) 素數 p와 양의 정수 e에 대하여

$$\tau(p^e) = e+1,$$
개수

$$\sigma(p^e) = 1 + p + \cdots + p^e = \frac{p^{e+1}-1}{p-1}$$
합

이고, 또 정수 m (≥ 2)의 표준분해가 $m = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$일 때 $\tau(m)$과 $\sigma(m)$은 각각 다음과 같다.

$$\tau(m) = (e_1+1)(e_2+1) \cdots (e_r+1) = \tau(p_1^{e_1})\,\tau(p_2^{e_2}) \cdots \tau(p_r^{e_r}),$$

정의 2.2.6 정수 전체의 집합 $\mathbb{Z}$에서 한 정수의 제곱인 정수를 **제곱수**(square)라 하고, 특히 2 이상인 정수 a의 제곱인 정수 a^2을 **완전제곱수**(perfect square)라고 한다.

- [문제 1-2]는 '약수의 개수'를 이용하여 풀어야 하는 문제로 [예시 답안]에는 대학과정에서 배우는 정수 n에 대한 **'표준분해'** 의 개념과 그 표준분해에 따른 정수 n의 '약수의 개수', '제곱수'의 개념이 포함되어 있습니다. [문제 1-2]의 [예시 답안]에 있는 정수 n을 m의 소수로 소인수분해하고 그에 대한 약수의 개수를 구하는 식은 고등학교 교육과정에서 다루지 않습니다. 뿐만 아니라 **'제곱수'** 라는 용어도 고등학교 교육과정에서 다루는 용어가 아닙니다. 따라서 [문제 1-2]를 해결하기 위해서는 대학과정에서 배울 수 있는 생소한 식과 용어를 이용해야 하므로 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

▶ 연세대학교 - 논술전형 - 자연계열(수학) 1번 - [문제 1-3]

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 1-3] [예시 답안]

[문제 1-3] 모든 전등이 처음에 꺼져있는 상태에서 수험번호가 4부터 2021까지의 학생이 연세로를 지나갔다. 2018명의 학생이 모두 지나간 후 2023개의 전등 중에서 임의로 하나를 골랐을 때, 그 전등이 켜져있을 확률을 구하시오. **[9점]**

1번 덜 눌러진 경우는 n이 2의 배수도 3의 배수도 아닌 경우이다,
2번 덜 눌러진 경우는 n이 2의 배수 또는 3의 배수이지만 6의 배수가 아닌 경우이다.
3번 덜 눌러진 경우는 n이 6의 배수인 경우이다.

1번 덜 눌러진 경우: B에 속하는 전등은 켜지고 A에 속하는 전등은 꺼진다.
켜진 전등의 개수는 2021-1010-673+336=674에서 44-22-14+7=15를 뺀 659이다.
2번 덜 눌러진 경우: A에 속하는 전등은 켜지고, B에 속하는 전등은 꺼진다.
켜진 전등의 개수는 22+14-7=29에서 7을 뺀 22이다.
3번 덜 눌러진 경우: A에 속하는 전등은 꺼지고, B에 속하는 전등은 켜진다.
따라서, 켜진 전등의 개수는 336에서 7을 뺀 329이다.

2015 개정 수학과 교육과정 『확률과 통계』 확률 단원 평가 방법 및 유의 사항

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 세 사건 이상에서 서로 배반이거나 서로 독립임을 가정한 복잡한 문제는 다루지 않는다.

대학과정 내용 대학 수학 교재 『대학미적분학』 - 분수방정식, 전확률의 법칙

정의 20 분할(partition)

표본공간 S의 n개의 사건 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 다음의 조건을 만족할 때, 표본공간 S의 **분할**이라고 한다.

(1) $A_i \cap A_j = \phi$ (단, $i \neq j$)

(2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

정리 12 전확률의 법칙(total pbobability rule)

n개의 사건 $A_1, A_2, \cdots, A_n$이 표본공간 S의 분할일 때, 사건 B의 확률은 0이거나 다음이 성립한다.

$$P(B) = \bigcup_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \cdot P(B|A_i)$$

- [문제 1-3]을 해결하기 위해서는 **서로 배반인 세 가지 사건에 대한 확률을 구해야 하며 각각의 확률을 구하는 과정도 상당히 복잡**합니다. 이는 고등학교 교육과정 평가 방법 및 유의 사항에서 명시하고 있는 에서 *'세 사건 이상에서 서로 배반이거나 독립임을 가정하는 복잡한 문제는 다루지 않는다,'* 을 준수하지 않은 것입니다. 확률에서 서로 배반인 세 사건이상을 다루는 내용은 대학 수학 교재 『확률과 통계』에서 **'분할' 과 '전확률의 법칙'** 으로 다루는 내용에 해당합니다.

▶ 연세대학교 - 논술전형 - 자연계열(수학) 2번 - [문제 2-1], [문제 2-2], [문제 2-3], [문제 2-4]

문항 및 제시문, 예시 답안 [제시문2], [문제 2-1, 2-2, 2-3, 2-4], [2-4 예시 답안]

[제시문 2] 구간 $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$의 길이를 모두 $b-a$로 정의한다. 집합 S가 구간 $[0, 1]$의 부분집합이고 서로 겹치지 않는 구간들의 합집합으로 나타날 때, 집합 S의 길이는 각 구간의 길이의 합으로 정의한다. 공집합의 길이는 0이라 한다.

예를 들어 $S=\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$일 때, 집합 S의 길이는

$\left(\frac{2}{9}-\frac{1}{9}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{2}=\frac{11}{18}$이다. 아래의 문제에서 주어진 함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 집합 $S=\{x \mid f(x)>t, 0 \le x \le 1\}$의 길이를 $g(t)$라고 하자. 두 실수 a, b에 대하여 $\min(a, b)=\begin{cases} a & (a<b) \\ b & (a \ge b) \end{cases}$ 으로 정의한다.

다음 물음에 답하시오.

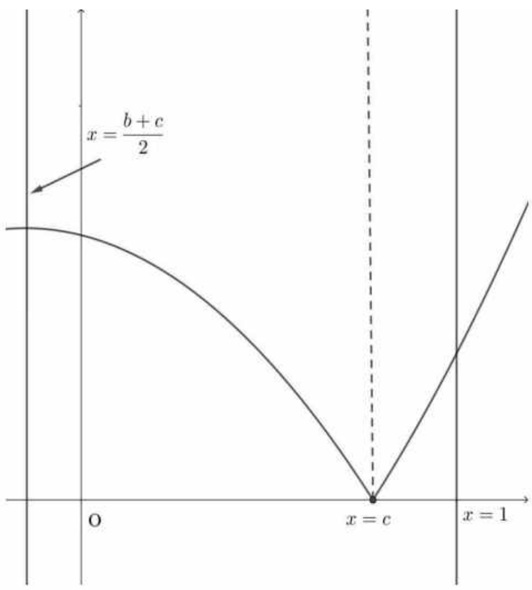
[문제 2-1] $f(x)=36x^3-27x^2-4x+9$ 일 때, $g(6)$을 구하시오. **[3점]**

[문제 2-2] $f(x)=8x^3-11x^2+3x+5$ 일 때, $g(t)=1$ 을 만족하는 t의 값의 범위를 구하시오. **[3점]**

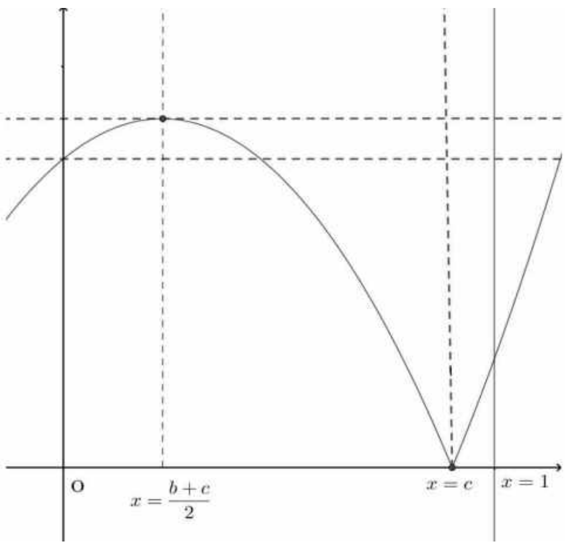
[문제 2-3] $f(x)=\min(ax, bx+c)$ $(a, b, c$는 상수이고 $a>0$, $b<0)$일 때, $g(t)$를 구하고 그래프를 그리시오. **[9점]**

[문제 2-4] $f(x)=|a(x-b)(x-c)|$ $(-10<a<0$, $-10<b<0$, $0<c<1$인 상수$)$일 때, $\int_0^{2023} g(t)\,dt$ 의 값을 구하시오. **[9점]**

(1) $b+c \le 0$ 인 경우:



(2) $b+c>0$ 인 경우:



대학과정 내용 『적분과 측도이론』 - 집합의 길이

Definition 1.1.1 (Intervals, boxes, elementary sets). An *interval* is a subset of $\mathbf{R}$ of the form $[a,b] := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a,b) := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$, $(a,b] := \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$, or $(a,b) := \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$, where $a \leq b$ are real numbers. We define the *length*[4] $|I|$ of an interval $I = [a,b], [a,b), (a,b], (a,b)$ to be $|I| := b - a$. A *box* in

Lemma 1.1.2 (Measure of an elementary set). *Let $E \subset \mathbf{R}^d$ be an elementary set.*

(i) *E can be expressed as the finite union of* disjoint *boxes.*

(ii) *If E is partitioned as the finite union $B_1 \cup \ldots \cup B_k$ of disjoint boxes, then the quantity $m(E) := |B_1| + \ldots + |B_k|$ is independent of the partition. In other words, given any other partition $B'_1 \cup \ldots \cup B'_{k'}$ of E, one has $|B_1| + \ldots + |B_k| = |B'_1| + \ldots + |B'_{k'}|$.*

We refer to $m(E)$ as the elementary measure *of E. (We occasionally write $m(E)$ as $m^d(E)$ to emphasise the d-dimensional nature of the measure.) Thus, for example, the elementary measure of $(1,2) \cup [3,6]$ is 4.*

whenever $E_1, \ldots, E_k$ are disjoint elementary sets. We also have the obvious degenerate case

$$m(\emptyset) = 0.$$

대학과정 내용 대학 수학 교재 『정수론』 - 최솟값

$$m_i = \min\{k_i, s_i\}, \qquad n_i = \max\{k_i, s_i\}$$

ㄴ 이라고 하면 다음이 성립한다(min 과 max 는 각각 최소값, 최대값).

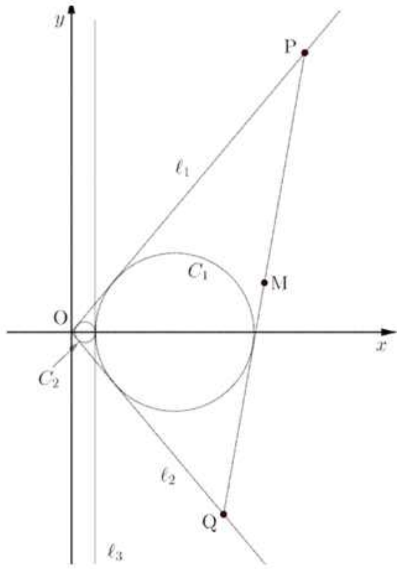
- [제시문 2]에 있는 내용은 대학 수학 교재 **『적분과 측도이론(An introduction to measure theory)』에서 다루는 내용과 동일**합니다. 구체적으로는 ①개구간과 반폐구간, 폐구간에 대한 구간의 길이, ②서로다른 구간의 합집합으로 이루어진 구간의 길이, ③공집합의 길이는 모두 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 내용으로 대학과정에서는 집합의 길이를 **'측도(measure)'** 라는 개념으로 설명하고 있습니다. 특히, [문제 2-1], [문제 2-2]는 [제시문 2]에서 집합의 길이로 정의한 함수 $g(t)$를 이용하여 해결해야 합니다. 따라서 [문제 2-1], [문제 2-2]는 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.
- [문제 2-3]에 있는 '$\min(ax, bx+c)$' 은 [제시문 2]에 정의되어 있는 의미로 표현하고 있지만, 이런 표현은 고등학교 교육과정 내에서 다루는 내용이 아니며 해당 내용은 대학 수학 교재 『정수론』에 나오는 개념으로 '두 수 중 최솟값' 을 의미하는 기호 표현에 해당합니다.
- [문제 2-4]에 있는 함수 $f(x)$는 절댓값이 포함되어있는 함수로 해당 문항을 풀기 위해서는 함수 $f(x)$의 그래프를 그리는 것이 필수적입니다. 하지만 고등학교 교육과정에서는 **절댓값이 포함된 함수의 그래프를 그리는 것**은 다루지 않습니다.

▶ 연세대학교 - 논술전형 - 자연계열(수학) 3번 - [문제 3-1], [문제 3-3],

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 3-1] [3-1 예시 답안] / [문제 3-3] [3-3 예시 답안]

[제시문 3] 좌표평면의 원점 O를 지나고 기울기가 m과 $-m$인 (단, $m \geq 1$) 직선을 각각 ℓ_1과 ℓ_2라 하자. 직선 ℓ_1 위의 점 $P(x_1, y_1)$과 직선 ℓ_2 위의 점 $Q(x_2, y_2)$가 조건 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $\overline{PQ}=1$을 모두 만족하며 움직인다. 다음 물음에 답하시오.

[문제 3-1] 선분 PQ의 중점 $M(x, y)$가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오. **[4점]**



[문제 3-3] $m=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$이고 $\overline{OQ}=\dfrac{1}{2}$일 때, 삼각형 POQ에 내접하는 원을 C_1이라 하자. 이때, 원 C_1과 x축이 만나는 두 점 중 원점에 더 가까운 점을 지나고 y축과 평행한 직선을 ℓ_3이라 하자. 이때, 직선 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3이 만드는 삼각형에 내접하는 원을 C_2라고 하자. 원 C_1의 중심과 원 C_2의 중심 사이의 거리를 구하시오.

[문제 3-1]

점 $P(x_1, y_1)$와 $Q(x_2, y_2)$에 대하여, 조건

$y_1 = mx_1$, $y_2 = -mx_2$, $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$을 모두 만족해야 한다.

$x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ 이므로,

$y=\dfrac{m(x_1-x_2)}{2}$, $x=\dfrac{y_1-y_2}{2m}$ 이고, $x_1 = x+\dfrac{1}{m}y$, $x_2 = x-\dfrac{1}{m}y$ 이다.

이를 조건 $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$에 대입하면

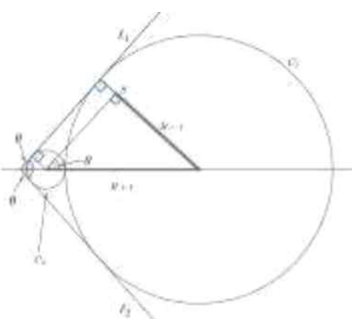
정답 $4m^2x^2+\dfrac{4}{m^2}y^2=1$, $y \leq mx$, $y \geq -mx$을 얻는다.

타원과 직선들의 교점을 계산하면 $4m^2x^2+\dfrac{4}{m^2}y^2=1$, $x \geq \dfrac{1}{2\sqrt{m^2+1}}$ 도 정답이다.

[문제 3-3]

원 C_1의 중심을 지나고 직선 ℓ_1에 수직인 직선을 ℓ_3라고 하자.

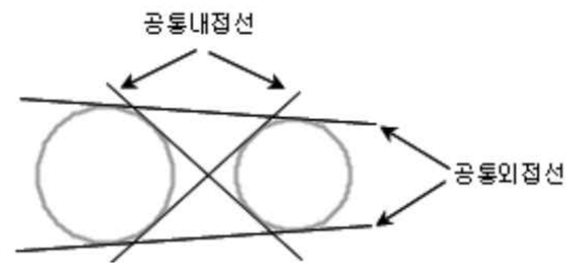
원 C_2의 중심에서 ℓ_3에 내린 수선의 발을 S라고 하고, S와 두 원의 중심을 꼭지점으로 하는 직각삼각형을 생각하면 등식 $\dfrac{R-r}{R+r}=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$에서 $\dfrac{r}{R}=\dfrac{4-\sqrt{10}}{4+\sqrt{10}}$을 구할 수 있다.

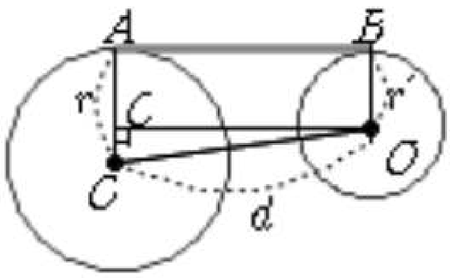


2015 개정 수학과 교육과정 『기하』 - 이차곡선- 교수·학습 방법 및 유의 사항

이차곡선은 원뿔을 절단해서 얻을 수 있는 곡선임을 이해하고, 이를 통해 기하적 대상을 대수적으로 다룰 수 있음을 인식하게 한다.

7차 수학과 교육과정 『수학(10-나)』 - 두 원의 위치관계





$$\overline{AB} = \sqrt{d^2 - (r - r')^2}$$

교육과정 밖의 내용 자취의 방정식

자취의 방정식

어떤 조건을 만족시키는 점들이 도형을 이룰 때, 이 도형을 주어진 조건을 만족시키는 점들의 자취라 한다.

이 때 특정한 조건을 만족시키는 자취 위의 임의의 점 P(x,y)에 대하여 x, y 사이의 조건을 x, y로 나타낸 식 f(x,y)=0을 자취의 방정식이라 한다.

- [문제 3-1]에서 구하는 도형의 방정식 $M(x,y)$은 [제시문 3]의 조건을 만족하는 선분 PQ의 중점이 그리는 **'자취' 에 대한 방정식**이며 결과적으로 구한 $M(x,y)$은 타원의 방정식임을 알 수 있습니다. 고등학교 교육과정에서는 이차곡선의 도입은 '원뿔을 절단해서 얻는 곡선임을 이해하는 하고, 이를 통해 기하학적 대상을 대수적으로 다룰 수 있음을 인식하게 한다.' 라고 명시되어 있습니다, 또한 '자취' 또는 '자취의 방정식' 고등학교 교육과정에서 다루는 내용이 아닙니다. '자취' 라는 개념을 이용하여 문제의 조건에 맞는 도형의 방정식을 구하는 것은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 내용에 해당합니다.
- [문제 3-3]에는 두 직선에 공통으로 접하는 반지름의 길이가 다른 두 원이 주어져 있습니다. 이를 이용해 문제를 해결하기 위해서는 현 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 '두 원의 공통내접선' 의 개념을 포함하는 '두 원의 위치관계' 에 대한 내용을 알고 있어야 합니다. **'두 원의 위치관계'** 와 관련된 내용은 7차 수학과 교육과정의 『수학(10-나)』에서 다루었지만 현재 2015 개정 교육과정에서는 다루지 않는 내용입니다.

10. 이화여자대학교

▶ 이화여자대학교 - 논술전형 - 자연계열 - 문항 1 - (1),(2),(3),(4)

문항 및 제시문, 문항 해설	[제시문], [문항 1-(1),(2),(3),(4)], [문항해설]

[문항 1] 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $2n \le x < 2n+2$일 때, $f(x) = 1 - |x-2n-1|$이다. (단, $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$이다.)
> (나) $x < 0$일 때, $f(x) = 0$이다.

닫힌구간 $[2n, 2n+2]$에서 직선 $y = ax\ (0 < a < 1)$와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점에서 만날 때 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 한다. 아래 물음에 답하시오. [40점]

(1) S_0을 구하시오.

(2) 닫힌구간 $[2n, 2n+2]$에서 직선 $y = ax$와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하고 S_n을 구하시오.

(3) 실수 a에 대하여 직선 $y = ax$와 함수 $y = f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[2n, 2n+2]$에서 두 점에서 만나고 닫힌구간 $[2n+2, 2n+4]$에서는 한 점에서 만나거나 만나지 않는 자연수 n의 값의 범위를 a로 나타내고 극한값 $\lim\limits_{a \to 0+} na$를 구하시오.

(4) 문항 (3)에서 구한 자연수 n의 값의 범위에 대하여 극한값 $\lim\limits_{a \to 0+} \frac{1}{n}(S_0 + S_1 + \cdots + S_n)$을 구하시오.

주어진 함수들에 의해 결정되는 도형을 파악하기 위해서 함수의 그래프를 이해하고 기하학적 조건을 수리적 조작을 통해 대수적 관계식으로 유추하여 활용하는 방법은 매우 유용한 추론 방법이다. 함수의 그래프들로 둘러싸인 도형이 교점들에 의해 결정될 때, 교점들을 파악하고 해당 교점들의 상태를 대수적 관계식으로 표현하도록 요구되는 문항이다. 또한 함수의 그래프들로 둘러싸인 도형의 넓이에 의해 결정되는 수열을 파악하고 극한값을 구하도록 하고 있다. 이 과정에서 극한에 대한 기본 성질과 극한의 대소 관계를 활용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는 수리적 계산능력을 평가하고 있다.

- [문항 1]의 (가)에 주어진 함수 $f(x)$는 절댓값이 포함된 함수에 해당이며 하위 문제(1),(2),(3),(4)을 해결하기 위해서는 함수 $f(x)$의 그래프 즉, 절댓값이 포함된 함수의 그래프를 좌표평면 위에 그릴 수 있어야 합니다. 하지만 고등학교 교유과정에는 **절댓값이 포함된 함수의 그래프를 그리는 것**과 관련된 성취기준은 존재하지 않으며, 고등학교 어느 교과에서도 다루지 않는 내용입니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

▶ 이화여자대학교 - 논술전형 - 자연계열 - 문항 2 - (1),(2),(3)

문항 및 제시문, 예시 답안	[문항 2-(1),(2),(3)]

[문항 2] 실수 m, b에 대하여 직선 $y=mx+b$가 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프와 서로 다른 세 점에서 만날 때 아래 물음에 답하시오. [30점]

(1) $m=1$일 때 위 조건을 만족하는 b의 값을 모두 구하시오.

(2) $m\geq 0$, $b>0$일 때 위 조건을 만족하는 m의 값의 범위를 구하고 b를 m으로 나타내시오.

(3) $m\geq 0$, $b>0$일 때 직선 $y=mx+b$와 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프의 세 교점을 x좌표의 크기순으로 A, B, C라 하자. 교점 A와 B사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이와 교점 B와 C사이에서 직선과 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같아지는 실수 b의 값을 모두 구하시오.

2-(1)

[풀이]

직선 $y=x+b$를 y축을 따라 평행이동하면 $b=-2$일 때 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프와 한 점에서 만나고 $-2<b<0$일 때 두 점에서 만난다. 그리고 $b=0$일 때 세 점에서 만난다.

2-(2)

[풀이]

$m\geq 0$, $b>0$일 때 직선 $y=mx+b$는 점 $(0,0)$, $(2,0)$을 지날 수 없다. 따라서 직선이 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프와 세 점에서 만나는 경우는 직선이 $0<x<2$에서 $y=-x(x-2)$의 그래프에 접할 때이다.

2-(3)

[풀이]

문항 (2)의 결과로부터 직선 $y=mx+b$와 함수 $y=|x(x-2)|$의 그래프가 세 점에서 만날 때는 직선과 함수의 그래프가 접할 때이고, $b=\frac{1}{4}(m-2)^2$ $(0\leq m<2)$이므로 $0<b\leq 1$이다.

• [문항 2]에 주어진 함수는 절댓값이 포함된 이차함수에 해당이며, 하위 문제(1),(2),(3)을 해결하기 절댓값이 포함된 이차함수의 그래프를 좌표평면 위에 그릴 수 있어야 합니다. 하지만 고등학교 교유과정에는 **절댓값이 포함된 함수의 그래프를 그리는 것**과 관련된 성취기준은 존재하지 않으며 고등학교 어느 교과에서도 다루지 않는 내용입니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

11. 중앙대학교

▶ 중앙대학교 - 논술전형 - 자연계열 I (수학) - 문제 2 - 문제 2-2

문항 및 제시문, 예시 답안	[문제 2-2], [예시 답안]

[문제 2-2] 주기가 2π인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\boxed{f(x)+2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=15\cdot\frac{|\sin x|}{2+\cos x}}$$

을 만족할 때, 정적분 $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$의 값을 구하시오. **[15점]**

편의상 $g(x)=15\cdot\dfrac{|\sin x|}{2+\cos x}$라 하자. 주어진 식 $f(x)=g(x)-2f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$를 반복해서 적용하면

$$\begin{aligned} f(x)&=g(x)-2f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4f(x+\pi)\\ &=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8f\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)\\ &=g(x)-2g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4g(x+\pi)-8g\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)+16f(x+2\pi)\end{aligned}$$

를 얻는다. 그런데 $f(x)$의 주기가 2π이므로,

대학과정 내용	대학 수학 교재『함수방정식과 부등식 이론에 대한 소개』- 함수방정식

13.1 The remaining Cauchy equations

The following functional equations are also referred to as Cauchy's equations (Cauchy [41]; cf. also Aczél [5])

$$f(x+y)=f(x)f(y), \tag{13.1.1}$$
$$f(xy)=f(x)+f(y), \tag{13.1.2}$$
$$f(xy)=f(x)f(y). \tag{13.1.3}$$

• [문제 2-2]에 주어진 함수식은 **'함수방정식'** 에 해당하며 [예시 답안]에 있는 풀이방법도 전형적인 함수방정식의 풀이에 해당합니다. '함수방정식'과 관련된 개념은 고등학교 교육과정에서 다루는 내용이 아니며, 대학 수학 교재『함수방정식과 부등식 이론에 대한 소개』에서 다루는 내용에 해당합니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

▶ 중앙대학교 - 논술전형 - 자연계열 I (수학) - 문제 3 - 문제 3-1

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 3-2], [예시 답안]

[문제 3-1] $x \geq 1$에서 정의된, 좌표평면 위의 곡선 $y = \sin(\ln x)$가 있다. 좌표평면의 원점에서 곡선 $y = \sin(\ln x)$에 그은 가능한 모든 접선의 접점들을 $(a_n, \sin(\ln a_n))$으로 나타내자. 이때, x좌표가 가장 작은 접점의 x좌표가 a_1이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이 성립한다. $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(\ln a_n)(\ln a_{n+1})}$의 값을 구하시오. **[10점]**

[문제 3-1]

곡선 위의 점 $(t, \cos(\ln t))$에서 접선의 방정식은 $y - \sin(\ln t) = \frac{\cos(\ln t)}{t}(x - t)$이다. 원점을 지나므로 $(x, y) = (0, 0)$을 대입하면 $\sin(\ln t) = \cos(\ln t)$가 된다. $t \geq 1$이므로 $\ln t \geq 0$이고 $\ln t = \frac{\pi}{4}, \ \pi + \frac{\pi}{4}, \ 2\pi + \frac{\pi}{4}, \cdots$ 이다. 따라서 $a_n = e^{\pi(n-1) + \frac{\pi}{4}}$이다.

2015 개정 수학과 교육과정 『수학 I』 교수·학습 방법 및 유의 사항

- 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 해석하거나 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 간단한 경우만 다루되, 주어진 구간 안에서 해를 구하는 것만 다룬다.

대학과정 내용 대학 수학 교재『복소해석학』- 삼각함수의 영점

정리 **3.2.3** *함수 $\sin z$와 $\cos z$의 영점들(zeros)은 각각 $z = n\pi$와 $z = (\frac{1}{2} + n)\pi$ (단, n은 정수)이다.*

$\cos z = -\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$이므로 $\cos z = 0$이면

$$z = \frac{\pi}{2} + n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

- [문제 3-1]에 주어진 함수 $y = \sin(\ln x)$는 로그함수와 삼각함수가 합성된 함수로 이 함수 위의 점t에서 접선을 구하는 과정에서 $\sin(\ln t t) = \cos(\ln(t)$와 같은 삼각함수가 포함된 방정식을 풀어야 합니다. $\sin(\ln t t) = \cos(\ln(t)$와 같은 식은 **삼각함수와 로그함수가 포함된 복잡한 방정식**에 해당하며 그 풀이과정에서도 주어진 구간 내에서 방정식의 해를 구하는 것이 아닌 삼각함수의 일반각 형태로 삼각함수가 포함된 방정식의 해($\ln t$의 값) 제시되어 있습니다. 다시 말해 삼각함수가 포함된 방정식에 삼각함수와 로그함수가 합성된 함수가 포함되어 있어 방정식의 형태가 간단하지 않으며 그 해를 구하는 과정에서 고등학교 교유과정에서 다루지 않는 **삼각함수의 일반각**의 형태로 그 해가 제시되어 있습니다. 삼각함수가 포함된 방정식의 해를 '일반각' 형태로 다루는 것은 대학 수학 교재『복소해석학』에서 '영점'이라는 개념으로 다루고 있습니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 출제된 문항에 해당합니다.

▶ 중앙대학교 - 논술전형 - 자연계열Ⅱ(수학) - 문제 2 - 문제 2-2

문항 및 제시문, 예시 답안	[문제 2-2], [예시 답안]

[문제 2-2] 좌표평면 위의 곡선 $y=4\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{36}\right)^3}$ 에서 점 $\mathrm{P}(0,109)$와 가장 가까운 두 점을 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$라 하자. 이때, $x=x_1$에서 $x=x_2$까지의 곡선 $y=4\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{36}\right)^3}$ 의 길이를 구하시오. (단, $x_1<x_2$이다.) **[15점]**

[문제 2-2]
점 P와 주어진 곡선 위의 점 사이 거리의 제곱의 함수를

$f(x)=x^2+\left\{4\left(1+\frac{x^2}{36}\right)^{\frac{3}{2}}-109\right\}^2$ 라 하자. $f(x)$의 미분

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\left\{4\left(1+\frac{x^2}{36}\right)^2-109\sqrt{1+\frac{x^2}{36}}+3\right\}$$

2015 개정 수학과 교육과정	『미적분』‘여러 가지 미분법’ - 교육과정 성취기준

[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.

2015 개정 수학과 교육과정	『수학Ⅱ』, 『미적분』 - 평가 방법 및 유의 사항

- 도함수를 활용하여 함수의 그래프의 개형을 그리거나 최댓값과 최솟값을 구하는 능력을 평가할 때, 지나치게 복잡한 함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다.

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 여러 가지 미분법과 도함수의 활용에서 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

- [문제 2-2]는 도함수를 이용하여 곡선위의 점과 점P까지의 거리가 최소가 되는 좌표평면 위의 두 점을 찾아 그 사이의 곡선의 길이를 구하는 문제입니다. [문제 2-2]에 주어진 함수 는 이차함수와 무리함수가 합성된 함수에 해당해 이를 바탕으로 [예시답안]에서 새롭게 정의된 함수 $f(x)$는 이차함수와 무리함수의 합성함수와 다항함수의 합으로 이루어진 복잡한 형태의 함수입니다. 이 함수를 이용해 거리가 최소가 되는 점을 구하기 위해서 함수 $f(x)$를 미분해야 하는데 이 미분 과정이 지나치게 복잡하여 교육과정 성취기준인 ‘*합성함수를 미분할 수 있다.*’ 의 달성여부를 확인하기 보다는 복잡한 계산 능력에만 치중하게 만드는 문항에 해당합니다. 고등학교 교육과정의 평가 방법 및 유의 사항에 ‘*여러 가지 미분법 및 도함수의 활용에서는 지나치게 복잡한 함수를 다루지 않는다.*’ 라고 명시되어 있음에도 불구하고 이를 준수하지 않고 출제된 문항에 해당합니다.

▶ 중앙대학교 - 논술전형 - 자연계열Ⅱ(수학) - 문제 3 - 문제 3-2

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 3-2], [예시 답안]

[문제 3-2] 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{A}(\cos t, \sin t)$와 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위의 점 $\mathrm{B}(x, y)$가 거리 1을 유지하며 연속적으로 움직인다. $t=0$일 때, 점 $\mathrm{B}(x, y)$는 제1사분면의 한 점에서 출발한다. $t=\frac{\pi}{2}$일 때, $\frac{dx}{dt}$의 값을 구하시오. 또한, 점 $\mathrm{B}(x, y)$의 x좌표의 최댓값을 구하시오. (단, $0 \le t \le \pi$이다.) **[15점]**

[문제 3-2]

문제의 조건에서 다음을 얻을 수 있다.

$$(x-\cos t)^2+(\sqrt{x}-\sin t)^2=1 \qquad (*)$$

음함수 미분하여 다음을 얻는다.

$$(x-\cos t)(x'+\sin t)+(\sqrt{x}-\sin t)\left(\frac{x'}{2\sqrt{x}}-\cos t\right)=0$$

2015 개정 수학과 교육과정 『미적분』 - 여러 가지 미분법 - 교수·학습 방법 및 유의 사항

- 매개변수로 나타낸 함수와 음함수는 간단한 것만 다룬다.

2015 개정 교육과정 교수·학습 자료 『미적분』 교수·학습 및 평가 자료

시간의 변화에 따른 물체의 위치 변화를 포함한 물체의 운동은 좌표평면에서의 곡선으로 표현될 수 있다. 그러나 평면에서의 모든 곡선이 $y=f(x)$의 형태로 표현되지는 않는다. 이를 구체적인 몇 가지 예를 통해 이해하게 하고, 학생들에게 이미 익숙한 직선, 원, 포물선 등을 포함한 간단한 곡선을 매개변수나 음함수를 이용하여 나타내 봄으로써 매개변수로 나타낸 함수와 음함수가 곡선을 표현하는 보다 일반적인 방법의 하나임을 이해하게 한다.

2015 개정 수학과 교육과정 [문제 3-2] '음함수 미분'에 필요한 교육과정 성취기준

[12수학Ⅱ02-05] 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
[12미적02-07] 합성함수를 미분할 수 있다.
[12미적02-08] 매개변수로 나타낸 함수를 미분할 수 있다.
[12미적02-09] 음함수와 역함수를 미분할 수 있다.

2015 개정 수학과 교육과정 『미적분』 '여러 가지 미분법' - 평가 방법 및 유의 사항

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 여러 가지 미분법과 도함수의 활용에서 지나치게 복잡한 문제는 다루지 않는다.

- [문제 3-2]의 풀이에서 제시된 음함수 $(x-\cos t)^2+(\sqrt{x}-\sin t)^2=1$에는 무리함수와 **삼각함수를 포함하고 있는 복잡한 형태의 음함수** 표현입니다. 이러한 음함수 표현은 직선, 원, 포물선 등의 일부를 나타내는 간단한 곡선이 아니므로 고등학교 교육과정 교수·학습 방법 및 유의사항에서 제시하고 있는 '*매개변수로 나타낸 함수와 음함수는 간단한 것만 다룬다.*' 라는 것에 위배되는 것에 해당합니다.
- [문제 3-2]의 풀이에서 제시된 음함수 $(x-\cos t)^2+(\sqrt{x}-\sin t)^2=1$를 미분하기 위해서는 ①함수의 곱의 미분법, ②합성함수 미분법, ③매개변수로 나타낸 함수의 미분법, ④음함수의 미분법을 복합적으로 이용해야하기 때문에 **음함수를 미분하는 과정이 상당히 복잡**합니다. 이와 같이 여러 가지 미분법을 이용하는 과정에서 지나치게 복잡한 문제를 다루는 것은 교육과정 평가방법 및 유의사항을 벗어나는 것입니다.

12. 한국외국어대학교

▶ 한국외국어대학교 - 논술전형 - 자연계열 7번

문항 및 제시문, 예시 답안 [7번 문항], [예시 답안]

두 함수

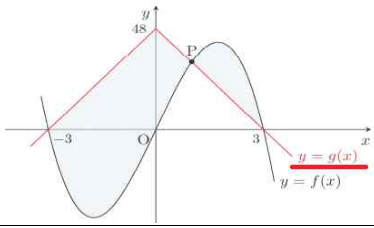
$$f(x)=-4x(x+3)(x-3),\quad \boxed{g(x)=-16|x|+48}$$

의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

(i) 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다. 제1사분면에 존재하는 교점 P의 x좌표는 양수이다. 식 $f(x)=g(x)$를 세우면

$$-4x(x+3)(x-3)=-16x+48$$

즉 $(x-3)(x+4)(x-1)=0$이다. 따라서 점 P의 x좌표는 1이다. (3점)



• [7번 문항]에 있는 함수 $g(x)$는 절댓값이 포함되어 있는 함수로 해당 문항을 풀기 위해서는 함수 $g(x)$의 그래프를 그리는 것이 필수적입니다. 하지만 고등학교 교육과정에서는 절댓값이 포함된 함수의 그래프를 그리는 것은 다루지 않습니다.

▶ 한국외국어대학교 - 논술전형 - 자연계열 9번

문항 및 제시문, 예시 답안 [9번 문항]

두 실수 a와 b에 대하여 실수 $a\odot b$를 다음과 같이 정의하자.

$$a\odot b=\begin{cases} a-b & (a\ge b) \\ 0 & (a<b)\end{cases}$$

이 때, 방정식 $(\sin\theta\odot\cos\theta)+(\cos\theta\odot(1-\cos\theta))=\sin\theta$를 만족시키는 θ의 값을 모두 구하시오. (단, $\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$)

대학과정 내용 대학 수학 교재『현대대수학』- 이항연산

집합 A의 두 원소로 이루어진 순서쌍 (x, y)에 대하여 A의 단 한 개의 원소 z를 대응시키는 사상

$$f: A\times A\longrightarrow A,\quad f(x, y)=z$$

를 A 위의 **이항연산**(binary operation) 또는 간단히 **연산**이라 하고 $f(x, y)$를 x, y의 합(sum), 곱(product) 또는 합성(composite)이라고 한다. 그리고, $f(x, y)=z$를 $\circ$와 같은 기호를 사용하여 $x\circ y=z$로 나타내고

'집합 A 위에 연산 $\circ$이 **정의되어 있다**(defined)'

고 한다. 이항연산을 나타내는 기호로서는 $\circ$, $*$, $+$, $\times$, $\cdot$ 등이 쓰인다.

• [9번 문항]에 사용된 '$a\odot b$'의 기호 표현은 고등학교 교유과정에서 다루지 않는 기호 표현이며, 대학 수학 교재『현대대수학』에서 다루는 **'이항 연산'**의 개념과 관련되는 것입니다. 따라서 두 실수 a와 b에 대하여 두 실수의 관계를 새로운 기호 '$a\odot b$'를 사용해 정의하는 것은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 것에 해당합니다.

13. 한양대학교

▶ 한양대학교 - 논술전형 - 자연계열(오후1)(수학) - 문제 1번 - 소문항 3번

문항 및 제시문, 예시 답안 [소문항 3번 문항], [예시 답안]

3. 제시문 <나>에서 주어진 함수 $g(x)$에 대하여, $\int_0^{2023} g(x)dx < 4046\pi e^{2023}$이 성립함을 보이시오.

그러므로 $g(x) = e^x\{\sin(2\pi x) + 2\pi x\cos(2\pi x)\} \le e^x(1+2\pi x)$이다.

$$\int_0^{2023} g(x)dx \le \int_0^{2023} e^x(1+2\pi x)dx = \int_0^{2023} e^x dx + 2\pi\int_0^{2023} xe^x dx$$

대학과정 내용 대학 수학 교재 『해석학』 - 적분의 비교정리

따름정리 6.17 (적분의 비교정리) 함수 $f,\ g : [a,\ b] \to \mathbb{R}$는 $[a,\ b]$에서 적분가능하고 모든 $x \in [a,\ b]$에 대하여 $f(x) \le g(x)$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

2015 개정 수학과 교육과정 『수학Ⅱ』 '부정적분' - 교육과정 성취기준

[12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

고등학교 교과서 『수학Ⅱ』 - 부정적분의 기본 성질

함수의 실수배, 합, 차의 부정적분

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

❶ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 실수)

❷ $\int\{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

❸ $\int\{f(x)-g(x)\}dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

• [1-3 문항]에 있는 부등식을 증명하는 과정에서 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 **'부등식과 관련된 적분의 성질'** 을 다루고 있습니다. 고등학교 교육과정에서 다루는 '부정적분의 기본성질' 에는 함수의 실수배, 합, 차에 관한 성질만 다루며 '부등식과 관련된 적분의 성질' 은 대학 수학 교재 『해석학』에서 다루는 내용입니다. 따라서 [1-3문항]은 고등학교 교육과정 성취기준을 벗어난 것뿐만 아니라 대학과정에서 배우는 내용을 알고 있어야 풀 수 있는 문항에 해당합니다.

▶ 한양대학교 - 논술전형 - 자연계열(오후1)(수학) - 문제 2번 - 3번

문항 및 제시문, 예시 답안 [소문항 3번 문항], [예시 답안]

3. 함수 $f(x)=x^{-\frac{2}{3}}(x+1)$은 $x>1$인 범위에서 1.9보다 작은 최솟값을 갖는다.

이를 이용하여 3의 배수인 자연수 n에 대해 $\boxed{\sum_{k=0}^{\frac{n}{3}} {}_nC_k} < 1.9^n$이 성립함을

보이시오.

3. 대칭성에 의해 $\sum_{k=0}^{n/3} {}_nC_k = \sum_{k=0}^{n/3} {}_nC_{n-k} = \sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k$임을 알 수 있다.

모든 $x>1$에 대해 $\underline{\sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k \le \sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k\, x^{k-2n/3}}$이 성립하므로

$$\sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k \le \sum_{k=2n/3}^{n} {}_nC_k\, x^{k-2n/3} \le \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^{k-2n/3} = x^{-2n/3}\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k = \left(\frac{1+x}{x^{2/3}}\right)^n$$

을 얻는다.

2015 개정 수학과 교육과정 『수학 I』 ‘수열’ – 학습 요소(용어와 기호)

(가) 학습 요소

- 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, a_n, $\{a_n\}$, $\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k}$

대학과정 내용 대학 수학 교재『해석학』 – 양항급수 비교 판정법

정리 7.2.3 양항급수의 비교 판정법

두 양항수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 유한 개를 제외한 모든 n에 대하여 $a_n \le b_n$을 만족시키고 $\sum b_n$이 수렴하면 $\sum a_n$도 수렴한다.

- [소문항 3번 문항]에 제시되어 있는 수열의 합 기호 표현은 수열의 합 기호(Σ)의 마지막 항의 첨자가 $\frac{n}{3}$로 되어 있습니다. $\sum_{k=1}^{\frac{n}{3}} {}_nC_k$**과 같은 수열의 기호 표현**은 고등학교 교육과정에서 다룰 수 있는 기호 표현이 아닙니다.
- [소문항 3번 문항]에 주어진 부등식이 성립함을 보이기위해서 문항의 [예시 답안]에서 **‘수열의 합(시그마)과 부등식에 대한 성질($a_n \le b_n$이면 $\Sigma a_n \le \Sigma b_n$)’** 을 이용하고 있습니다. 고등학교『수학 I 에서는 수열의 합과 관련하여 합과 차, 실수배에 관련된 성질만 다루며 부등식에 관련된 성질은 다루지 않습니다. ‘수열의 합(시그마)과 부등식에 대한 성질($a_n \le b_n$이면 $\Sigma a_n \le \Sigma b_n$)’ 와 같은 성질은 대학 수학 교재『해석학』에서 ‘양항급수의 비교 판정법’ 에 관련하여 다루고 있습니다.
- 본 문항은 고등학교 교육과정에서 사용할 수 없는 기호 표현을 사용하고 있으며 그 풀이과정에서도 대학과정의 내용을 포함하고 있으므로 대학과정의 내용을 알고 있지 못한다면 쉽게 해결할 수 있는 문제가 아닙니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

▶ 한양대학교 - 논술전형 - 자연계열(오후2)(수학) - 문제 1번 - 소문항 3번

문항 및 제시문, 예시 답안, 채점 기준	[소문항 3번 문항], [예시 답안], [채점 기준]
3. $\sum_{k=1}^{100} {}_{300}\mathrm{C}_{3k-1}$ 의 값을 구하시오.	
대칭성에 의해 $\sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-1} = \sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-2}$ 이므로 $\sum_{k=1}^{100} {}_{300}C_{3k-1} = \frac{1}{2}(8^{100} - a_{100}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}8^{100} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}(8^{100} - 1)$ 이다.	
이항계수의 대칭성을 이용하여 $\sum_{k=1}^{n} {}_{3n}\mathrm{C}_{3k-1}$ 의 값을 구하였는가?	
2015 개정 수학과 교육과정	『확률과 통계』'경우의 수' - 성취기준, 학습 요소
[12확통01-03] 이항정리를 이해하고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있다.	
(가) 학습 요소 • 원순열, 중복순열, 중복조합, 이항정리, 이항계수, 파스칼의 삼각형, ${}_n\Pi_r$, ${}_n\mathrm{H}_r$	

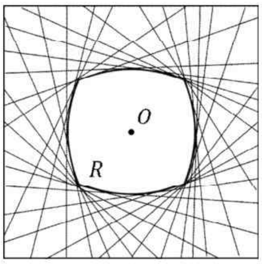
• [소문항 3번 문항]은 **'이항계수의 대칭성'** 을 이용하여 풀이할 것을 유도하고 있습니다. 하지만 '이항계수의 대칭성' 에 대한 설명이나 내용은 제시문이나 문항의 어디에도 언급되어 있지 않습니다. 고등학교 『확률과 통계』의 이항정리를 배울 때 '이항계수' 를 다루고 있지만, '이항계수의 대칭성' 이란 용어나 개념은 교육과정이나 교과서 어디에서도 찾아볼 수 없는 개념에 해당합니다. [채점 기준]에도 '이항계수의 대칭성' 을 이용하여 그 값을 구하였는가라는 내용이 있는 것을 볼 때 학생들은 문제를 접하기 전에 '이항계수의 대칭성' 에 대한 내용을 알고 있어야 하지만 이에 대한 내용은 [제시문] 뿐만 아니라 고등학교 교유과정에서도 다루지 않고 있으므로 '이항계수의 대칭성' 에 대한 개념을 알고 있지 못하는 경우에는 이 문항을 해결할 수 없습니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

14. 홍익대학교

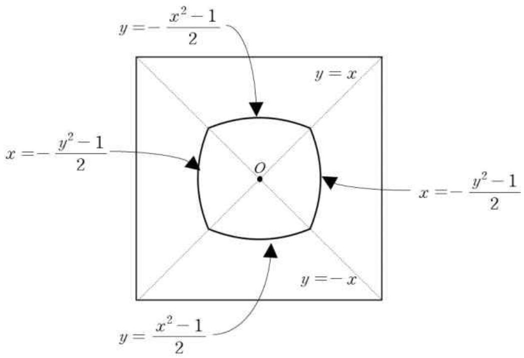
▶ 홍익대학교 - 논술전형 - 자연계열 - 문제 1 - 소문항 (3)

문항 및 제시문, 예시 답안 [소문항 (3)]

(3) 문항 (2)에서 접힌 자국이 없는 영역 R가 아래의 그림과 같이 생성될 때, 이 영역의 넓이를 구하시오.



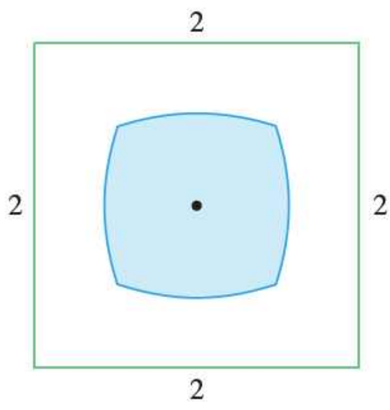
(3) 대칭을 고려하면 정사각형의 각 변을 준선으로 삼는 각각의 포물선은 $y=x$와 $y=-x$ 2개의 직선으로 그 경계가 나뉜다. (아래 그림 참조)



대학과정 내용 대학 수학 교재『대학미적분학』- '적분과 관련된 '연습문제

아래 그림은 정사각형의 변보다 중심까지의 거리가 더 가까운 정사각형 안의 모든 점들을 포함하는 영역를 나타냅니다. 이 영역의 넓이를 구하여라.

16. The figure shows a region consisting of all points inside a square that are closer to the center than to the sides of the square. Find the area of the region.



• [소문항 (3)]]의 문제는 **대학 수학 교재『대학미적분학(Calculus by Stewart, James 8th, p353)』의 적분 단원의 연습문제에 실려있는 문제와 동일한 문제**입니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어나 대학과정에서 다루는 내용을 출제한 것으로 판정됩니다.

▶ 홍익대학교 - 논술전형 - 자연계열 - 문제 2 - 소문항 (1),(2),(3)

문항 및 제시문, 예시 답안 [문제 2], [소문항 (1),(2),(3)], [예시 답안]

[문제2] - 제시문

이러한 간섭의 효과를 줄이기 위해 현대 통신에서 송신기는 하나의 비트를 한 번 보내는 대신 동일한 비트를 연속으로 n번(이때 n은 홀수인 자연수) 반복하여 보낸다. 이러한 반복을 통해 간섭에 의한 최종 오류를 줄일 수 있는데, 이를 n-반복 코드(n-repetition code)라고 한다. 수신기에서 받은 n개의 비트들을 기준으로 송신기가 보낸 비트가 무엇인지를 결정하게 되며, 이때 수신기는 더 많이 받은 비트를 송신기가 보내었다고 결정한다.

예시: $n=5$인 5-반복 코드의 경우, 1을 보내는 대신, 송신기는 1을 5개 붙여서 11111을 송신한다. 이때, 간섭에 의해 각각의 비트는 변화할 수 있다. 수신기가 10011을 받았다면 0이 두 개이고 1이 세 개이므로 수신기는 송신기가 보낸 비트는 1이라고 최종결정한다. 혹은, 수신기가 10000을 받았다면 수신기는 송신기가 보낸 비트가 0이라고 최종결정하게 된다. 이처럼 수신기가 최종결정한 비트가 송신기가 보낸 비트와 서로 다른 경우 '최종결정오류'가 발생했다고 하자.

(1) 보통의 경우, 각각의 비트가 간섭에 의해 바뀔 확률 p를 0.1이라 하자. 이때, 3-반복 코드 수신기의 최종결정 비트와 송신기가 보낸 비트가 서로 달라 최종 결정 오류가 발생할 확률을 구하시오.

(2) 갑작스런 태양의 활동으로 각각의 비트가 바뀔 확률 p가 0.1에서 0.2로 늘어났다고 하자. 이때, 동일하게 구성된 3-반복 코드 수신기의 최종 결정 오류 확률을 구하시오. 그리고, 이 값이 문항 (1)에서 구한 확률의 몇 배인지 소수점 둘째 자리에서 반올림하여 구하시오.

(3) 문항 (2)와 같이 태양 활동이 활발한 경우($p=0.2$), 수신기의 최종 결정 오류를 줄이기 위해 송신기의 비트를 m번 반복하는 m-반복 코드를 설계하려고 한다. 단, m-반복 코드 수신기의 최종 결정 오류 확률값이, 문항 (1)에서 구한 $p=0.1$일 때의 3-반복 코드의 최종 결정 오류 확률값보다 더 작도록 설계하고 싶다. 필요한 m의 최솟값을 아래의 표를 참고하여 구하시오.

선행교육 예방을 위한 교과별 안내자료 평가 시 유의 사항 - 새로운 용어 및 기호 사용

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음

- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

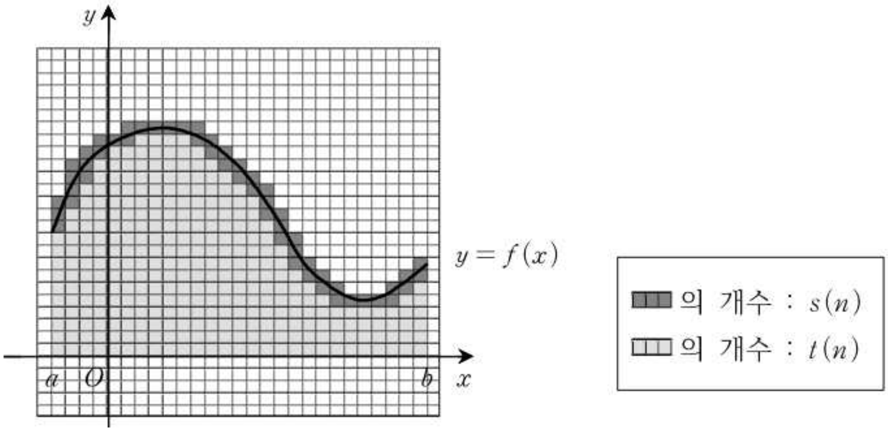
• [문제2[의 제시문에는 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 **'n-반복 코드'**, **'최종결정오류' 와 같은 새로운 용어를 정의**되어 있으며 [소문항 (1),(2),(3)]은 모두 이 용어를 이용하여 문제를 해결할 것을 요구하고 있습니다. 한국교육과정평가원에서 발표한 『선행교육 예방을 위한 교과별 안내 자료』의 평가 시 유의사항에는 '*용어와 기호가 교육과정의 학습 요소에서 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 한다.*' 라고 되어 있습니다. 본 문제는 문제에서 새롭게 정의한 용어를 이용하여 문제를 해결해야 하므로 본 문항은 고등학교 교육과정을 벗어나 출제된 것으로 판정됩니다.

▶ 홍익대학교 - 논술전형 - 자연계열 - 문제 3 - 소문항 (1),(2),(3),(4)

문항 및 제시문 [제시문(가)], [제시문(나)] [소문항 (1),(2),(3),(4)]

(가) 홍익이는 컴퓨터 화면에 그려진 함수의 그래프를 보고, 확대하면 작은 픽셀들로 그림이 그려지는 것을 확인하였다. 곡선을 그리는 픽셀들을 보고, 픽셀의 개수를 셈으로써 곡선의 길이, 그리고 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있는지 궁금하였다.

픽셀들을 더 작게 하여 촘촘하게 하면서, 해당되는 픽셀의 개수와 픽셀의 넓이의 곱, 또는 해당되는 픽셀의 개수와 픽셀의 한 변의 길이의 곱 등의 극한을 취하면 영역의 넓이 또는 곡선의 길이와 관련이 있으리라 예상하였고, 아래 (나)와 같은 설정으로 시작하여 수식으로 확인하고자 하였다.



(나) 자연수 n에 대해, 좌표평면을 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정사각형으로 이루어진 모눈종이(격자)로 생각하자. 이때 x축과 y축을 모눈의 경계선 중에 포함한다. 여기에서는, 각 정사각형 영역은 옆쪽과 아래쪽 경계선은 포함하고 위쪽 경계선은 포함하지 않는다고 하자. 또한, 정사각형 영역이 곡선의 점을 하나라도 포함하는 경우 그 곡선을 만난다고 하자. 구간 $[a, b]$에서 정의되는 음이 아닌 값을 갖는 연속 함수 $f(x)$에 대해, $y=f(x)$의 그래프 곡선과 만나는 정사각형들의 개수를 $s(n)$이라 하고, x축과 곡선 사이에서 x축과는 만나도 되지만 그래프 곡선과는 만나지 않는 정사각형들의 개수를 $t(n)$이라 하자. 단, a, b는 정수만 고려하고, 구간 $[a, b]$를 넘어서는 정사각형은 고려하지 않는다.

예를 들어, 아래의 그림과 같이 구간 $[0, 1]$에서의 함수 $f(x)=x$에 대해, $s(2)=4$, $t(2)=1$이고, $s(3)=6$, $t(3)=3$이다.

(1) 실수 c에 대해 가우스 기호 $[c]$는 c를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다. 즉 c에 대해 $m \le c < m+1$인 정수 m이 $[c]$의 값이다. 임의의 실수 c에 대해, 분모가 자연수 n이고 분자가 정수인 분수 중에서 c를 넘지 않는 가장 큰 분수를 가우스 기호를 이용하여 표시하시오.

(2) 닫힌 구간 $[a, b]$를 길이 $\frac{1}{n}$인 구간들로 분할하였을 때, k번째 구간에서의 $f(x)$의 최솟값을 m_k, 최댓값을 M_k라 하자. $s(n)$과 $t(n)$의 식을 가우스 기호와 $\sum$ 기호를 이용하여 나타내시오.

(3) 구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 식이 다음과 같다고 한다.

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x < 1) \\ -\frac{1}{2}(x-1)+2=-\frac{x}{2}+\frac{5}{2} & (1 \le x \le 3) \end{cases}$$

주어진 $f(x)$에 대하여 $s(n)$와 $t(n)$을 자연수 n에 관한 다항식으로 나타내시오.

(4) 문항 (3)의 $f(x)$와 이에 대한 $s(n)$, $t(n)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{t(n)}{n^2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$을 구하시오. 이 중에서 문항 (3)의 $y=f(x)$의 그래프와 x축 사이 영역의 넓이와 같은 것은 무엇인가? $\lim_{n\to\infty}\frac{s(n)}{n}$은 $y=f(x)$의 그래프의 길이를 나타내는가?

대학과정 내용 대학 수학 교재 『정수론』 - 가우스 기호

정의 1.4.4 실수 x에 대하여, x 보다 작거나 같은 정수 중에서 가장 큰 정수를 x의 **정수부분**(integral part)이라 하고 이것을 $[x]$로 나타낸다.

대학 수학 교재 『해석학』 - M_k, m_k

f가 $[a, b]$에서 연속이거나 단조이면, 분할 $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$에 대하여 $k = 1, 2, \ldots, n$에 대한 수들 $M_k = \sup\{f(x) : x \in I_k\}$와 $m_k = \inf\{f(x) : x \in I_k\}$를 함수의 값들로 얻는다. 연속함수에 대하여 이것은 정리 5.3.4이고 단조함수에 대하여 이 값들은 구간의 우측과 좌측 끝점에서 얻는다.

대학 수학 교재 『대학미적분학』 - 밀도와 질량

Density and Mass

In Section 8.3 we were able to use single integrals to compute moments and the center of mass of a thin plate or lamina with constant density. But now, equipped with the double integral, we can consider a lamina with variable density. Suppose the lamina occupies a region D of the xy-plane and its **density** (in units of mass per unit area) at a point (x, y) in D is given by $\rho(x, y)$, where ρ is a continuous function on D. This means that

$$\rho(x, y) = \lim \frac{\Delta m}{\Delta A}$$

where Δm and ΔA are the mass and area of a small rectangle that contains (x, y) and the limit is taken as the dimensions of the rectangle approach 0. (See Figure 1.)

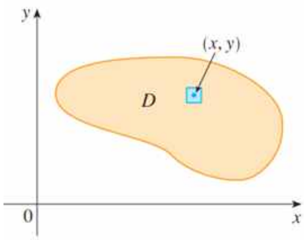


FIGURE 1

To find the total mass m of the lamina we divide a rectangle R containing D into subrectangles R_{ij} of the same size (as in Figure 2) and consider $\rho(x, y)$ to be 0 outside D. If we choose a point (x_{ij}^*, y_{ij}^*) in R_{ij}, then the mass of the part of the lamina that occupies R_{ij} is approximately $\rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$, where ΔA is the area of R_{ij}. If we add all such masses, we get an approximation to the total mass:

$$m \approx \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$$

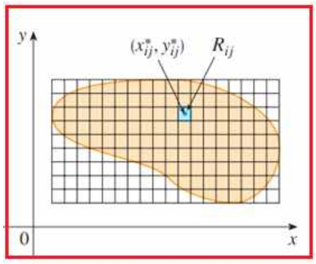


FIGURE 2

If we now increase the number of subrectangles, we obtain the total mass m of the lamina as the limiting value of the approximations:

$$\boxed{1} \quad m = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \rho(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint_D \rho(x, y)\,dA$$

- [제시문(가)]의 홍익이의 아이디어와 [제시문(나)]의 내용은 대학 수학 교재 『대학미적분학』의 **이중적분의 응용단원의 '밀도와 질량(Density and Mass)' 의 내용**과 동일합니다. 따라서 대학 교재의 내용을 출제한 것으로 판정됩니다.
- [소문항 (1),(2)]에는 **'가우스 기호'** 에 대해서 언급하고 있는데 '가우스 기호' 는 고등학교 교육과정에서 다루는 내용이 아니며 대학 수학 교재 『정수론』에서 나오는 개념에 해당합니다. 특히 [소문항(2)]에 있는 m_k, M_k의 표현은 대학 수학 교재 『해석학』에서 나오는 개념입니다.
- [소문항 (3),(4)]는 모두 대학과정의 내용을 다룬 [제시문(나)]에서 정의된 새로운 함수 $s(n)$과 $t(n)$을 이용하여 문제를 해결해야 하므로 [소문항 (3),(4)]는 고등학교 교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문항에 해당합니다.

▶ 홍익대학교 - 논술전형 - 자연계열 - 문제 2 - 소문항 (1),(2),(3)

문항 및 제시문 [제시문], [소문항 (1),(2),(3)]

홍익이는 낙하산을 이용하여 우주발사체의 추진체를 재활용하는 기술을 접하였고, 머리와 추진체로 분리되는 물 로켓을 만들고 추진체를 재활용하고자 추진체에 낙하산을 설치하였다. 그리고 $t=0$초에서 물 로켓을 지면으로부터 수직 방향으로 발사하였다. 시각 t에서의 지면으로부터 물 로켓 추진체 밑면의 높이를 $y_1(t)$ m, 물 로켓 머리의 높이를 $y_2(t)$ m라 하자. <그림 1>과 같이 발사 후 $t=6$까지 물 로켓은 머리와 추진체가 같이 움직이고, $t=6$에서 물 분사를 멈추고 머리와 추진체로 분리된다. <그림 2>와 같이 추진체는 $t=9$에서 최고 높이에 도달하고 낙하산이 펴진다. 낙하산에 의하여 $t=12$까지 추진체의 속도가 시간에 따라 변한다. 그 후 착륙할 때까지의 속도는 일정하다. $t=t_2$에서 추진체는 지면에 착륙한다. <그림 3>과 같이 물 로켓 머리의 속도는 $t=6$ 이후 일정하다가 $t=t_1$에서 예상치 못한 돌풍이 발생하여 시간에 따라 변한다. 이를 정리하면, 시각 t에서의 물 로켓 추진체의 속도 $v_1(t)$ m/s와 물 로켓 머리의 속도 $v_2(t)$ m/s는 다음과 같다. (단, $y_1(0)=0$, $y_2(0)=10$ 이다.)

(1) $t=6$에서 물 로켓이 머리와 추진체로 분리될 때, 머리의 높이 $y_2(6)$의 값을 구하시오.

(2) $t=12$에서 추진체 밑면의 높이 $y_1(12)$의 값을 구하시오.

(3) 추진체가 착륙한 시각 $t=t_2$에서 머리의 높이가 $y_2(t_2)=910$ m일 때, 돌풍이 발생한 시각 t_1을 구하시오.

대학과정 내용 대학 수학 교재 『해석학』 - 함수열

2장에서 다룬 수열은 정의역으로 자연수 집합을 갖는 실수열이었다. 이제 각 항들이 함수인 수열에 대하여 알아보자. D는 $\mathbb{R}$의 공집합이 아닌 부분집합이라 하자. 각 자연수 n에 대하여 함수 $f_n : D \to \mathbb{R}$을 정의할 때 수열 $\{f_n\}$을 D에서 정의된 **함수열** (sequence of functions)이라 한다. 각 $x \in D$에 대하여 함수값의 수열 $\{f_n(x)\}$는 실수

선행교육 예방을 위한 교과별 안내자료 평가 시 유의 사항 - 새로운 용어 및 기호 사용

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음

- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

사례 다음은 위반 사례에 해당함

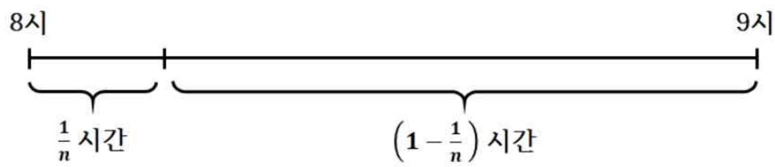
- $[x]$과 같은 가우스 함수, f_n과 같이 해석학에서 사용하는 함수열의 기호 등 교육과정에서 다루는 범위를 넘어서는 용어와 기호를 문항 내의 조건에서 정의한 뒤 이를 활용하는 문항을 출제하여 평가함.

- [문제2]의 [제시문]과 [소문항(1),(2),(3)]에 있는 $y_1(t)$, $y_2(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$와 같은 기호 표현은 모두 고등학교 교육과정에서 다루지 않는 함수의 표현 방법입니다. 이와 같이 함수에 아래첨자가 있는 함수의 표현방법은 대학 수학 교재 『해석학』에서 다루는 **'함수열' 과 관련된 기호 표현**입니다. 고등학교 교육과정에서 다룰 수 있는 학습요소에서 벗어난 새로운 용어 및 기호를 사용한 문제에 해당합니다.

▶ 홍익대학교 - 논술전형 - 자연계열 - 문제 3 - 소문항 (1),(2),(4),(5)

문항 및 제시문 [제시문(가)], [소문항 (1),(2),(4),(5)]

(가) 홍익이는 등교하기 위하여 집 앞 버스 정류장에서 매일 아침 8시 정각부터 학교 버스를 기다리기 시작한다. 홍익이가 타려는 학교 버스는 매일 아침 8시부터 9시까지 한 시간 동안 임의의 시각에 무작위로 한 번 정류장에 도착한다. 자연수 n에 대하여 홍익이가 n일 동안 등교한다고 할 때, n일 동안 하루도 빠짐없이 $\frac{1}{n}$시간보다 긴 시간 동안 홍익이가 버스를 기다리는 사건을 A_n이라고 하자.



<그림 1>

(1) 사건 A_1과 A_2가 일어날 확률 $\mathrm{P}(A_1)$과 $\mathrm{P}(A_2)$를 각각 구하시오.

(2) 사건 A_n이 일어날 확률 $\mathrm{P}(A_n)$을 구하시오.

(4) 제시문의 (나)와 문항 (3)의 결과를 이용하여 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(A_{n+1}) > \mathrm{P}(A_n)$임을 보이시오.

(5) 홍익이가 n일 동안 적어도 한 번 이상 $\frac{1}{n}$시간보다 짧은 시간 동안 버스를 기다리는 사건을 B_n이라고 하자. 사건 B_n이 일어날 확률을 $\mathrm{P}(B_n)$이라고 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $\mathrm{P}(B_n) > \frac{1}{2}$임을 보이시오.

대학과정 내용 대학 수학 교재『확률과 통계』- 지수분포, 확률의 곱셈정리

양의 실수 구간에서 정의한 어떤 사건이 발생하기까지의 대기시간에 관한 확률변수를 **지수확률변수**라 하고, 이 확률변수 X의 확률밀도함수는

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0,\ \lambda > 0 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

이다. 이때, 확률변수 X는 **지수분포**를 따른다고 한다.

참고

확률의 곱셈정리 I은 세 개 이상의 사건에 대해서도 성립한다. 즉 n개의 사건 $A_1, A_2, \cdots, A_n$에 대하여, $P(A_i) > 0$일 때,

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

이다. (단, $i = 1, 2, \cdots, n$)

2015 개정 수학과 교육과정	『확률과 통계』 - 학습요소, 평가 방법 및 유의사항

(가) 학습 요소

- 시행, 통계적 확률, 수학적 확률, 여사건, 배반사건, 조건부확률, 종속, 독립, 독립시행, $\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(B|A)$

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 세 사건 이상에서 서로 배반이거나 서로 독립임을 가정한 복잡한 문제는 다루지 않는다.

선행교육 예방을 위한 교과별 안내자료	평가 시 유의 사항 - 새로운 용어 및 기호 사용

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음
- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

- [제시문(가)]에 있는 내용은 '일정한 시간 안에 사건이 발생하는 데까지 걸리는 대기시간' 에 대한 확률 문제로서 대학과정『확률과 통계』에서 배우는 **'지수분포'** 의 개념과 연관되는 내용입니다. '지수분포' 와 관련된 개념은 고등학교 교육과정에서 다루지 않습니다.
- [소문항 (1)]에 있는 $P(A_1)$, $P(A_2)$와 같이 **사건에 아래첨자가 붙은 확률의 기호 표현**은 고등학교 교육과정 내에서 다룰 수 있는 기호 표현이 아닙니다. [소문항 (2),(4),(5)]에도 사건에 아래첨자가 붙은 동일한 기호 표현이 사용하고 있습니다. 이러한 기호 표현은 대학 수학 교재『확률과 통계』에서 사용하는 기호 표현에 해당합니다.
- [소문항 (2),(3,(4),(5)]는 **서로 독립인 n개의 사건에 대한 독립시행의 확률**을 구하는 문제입니다. 하지만 고등학교 교육과정에는 '*세 개 이상의 사건에서 서로 독립임을 가정하는 복잡한 문제는 다루지 않는다.*' 라고 명시되어 있으며 세 개 이상의 사건에 대한 확률을 구하는 문제는 대학과정인『확률과 통계』에서 다룰 수 있는 내용입니다. 따라서 [소문항 (1),(2),(4),(5)] 대학과정에서 다루는 기호 표현을 사용하고 있으며 고등학교 교육과정에 명시된 평가 방법 및 유의사항을 준수하지 않은 문항에 해당합니다.