대학별 고사 문항 분석 기준	
유형 ①	**교육과정 성취기준 또는 평가기준에 명시된 내용**을 벗어난 경우 (**교육과정에 명시된 내용**: 교유과정 성취기준, 학습요소, 교수학습방법 및 유희사항, 평가 방법 및 유의사항)
유형 ②	**교육과정 성취기준 또는 평가기준에 명시되지 않은 내용**을 출제한 경우 (**교육과정에 명시되지 않는 내용**: 이전 교육과정의 내용, 현 교육과정에서 다루지 않는 내용)
유형 ③	**대학과정의 내용**이 포함된 경우 (**대학과정의 내용**: 대학교재에서 다루는 수학용어·기호, 공식, 개념, 성질)

서울 15개 대학의 2024학년도 대학별고사 논술·구술전형 자연계열 수학 문제 중
교육과정의 범위와 수준을 벗어난 문제의 판정 근거

대학		전형	문제		교육과정을 벗어난 문제에 대한 구체적인 판정 근거	교육과정 미준수 유형*			문항수**	전체 문항수***	비율(%)****
NO	대학명		문항카드	소문항 번호		①	②	③			
4	동국대	논술	8	문제2-(3)	• ‘삼각함수 반각 공식’이 이용 됨.	·	●	·	1	9	11.1
6	서울대	면접	B-1	2-1	• ‘만난다’, ‘사라진다.’ 새로운 용어 및 규칙이 정의됨.	●	·	·	7	19	36.8
				2-2		●	·	·			
				2-3		●	·	·			
				2-4		●	·	·			
			B-2	1-1		●	·	·			
				1-2		●	·	·			
				1-3		●	·	·			
7	서울시립대	논술	4	문제4-(a)	• 점 A_N의 좌표는 대학과정의 ‘1의 n제곱근’ 표현임.	·	·	●	2	6	33.3
				문제4-(b)				●			
8	성균관대	논술	8	2-II	• ‘네 점을 지나는 원의방정식’을 구하는 과정이 포함됨	●	·	·	4	23	17.4
				2-III							
			11	2- I	• ‘수열의 귀납적 정의’ 관련 성취기준 수준을 벗어남.	●	·	·			
				2-II		●	·	·			
				2-III		●	·	·			
10	연세대	논술	4	2-2	• $a_n^{c_m}$와 같은 기호 표현은 교육과정에서 다루지 않음.	●	·	·	1	8	37.5
11	이화여대	논술	7	1-(2)	• ‘삼각함수의 배각 공식’이 이용됨.	·	●	·	7	23	30.4
				1-(3)	• a^{2^n}, $a^{2^{n+1}}$와 같은 기호표현은 교육과정에서 다루지 않음 • 지수의 성질에 대한 복잡한 계산과정 포함	●	·	·			
				1-(4)	• a^{2^n}, $a^{2^{n+1}}$와 같은 기호표현은 교육과정에서 다루지 않음 • 적분의 비교정리(부등식에 대한 적분의 성질) 이용됨.	·	·	●			
				1-(5)	• 적분의 비교정리(부등식에 대한 정북의 성질) 이용됨.	·	·	●			
			10	1-(2)	• a^{2^n}, $a^{2^{n+1}}$와 같은 기호표현은 교육과정에서 다루지 않음 • ‘삼각함수의 배각 공식’이 이용됨. • 지수의 성질에 대한 복잡한 계산과정 포함	●	·	·			
				1-(3)	• a^{2^n}, $a^{2^{n+1}}$와 같은 기호표현은 교육과정에서 다루지 않음 • 적분의 비교정리(부등식에 대한 적분의 성질) 이용됨.	●	·	·			
				1-(4)	• 적분의 비교정리(부등식에 대한 적분의 성질) 이용됨.	·	·	●			
12	중앙대	논술	12	2-1	• ‘삼각함수의 일반해’를 다루고 있음	·	●	·	1	14	7.1
13	한국외대	논술	5	3번	• ‘삼각함수의 일반해’를 다루고 있음	·	●	·	2	7	14.3
				6번	• 새로운 함수 <f(x)>를 정의함. • $f_n(x)$은 대학과정의 함수열 기호 표현에 해당함.	·	·	●			
14	한양대	논술	5	문제1-3	• ‘삼각함수의 일반해’를 다루고 있음	·	●	·	1	18	5.6
총 계						15	5	6	26	88	13.8

***유형**은 앞서 제시한 대학별 고사 문항 분석 기준에 대한 유형을 의미함.

****문항 수**는 각 대학에서 출제된 교육과정 미준수 문항(소문항) 수에 해당함.

*****전체 문항 수**는 대학별 자연계열 대학별고사 전체 문항(소문항) 수에 해당함.

******비율(%)**은 각 대학별 (교육과정을 벗어나 출제된 수학 문항 수/자연계열 대학별고사 전체 수학 문항 수)×100 으로 계산함.

1. 동국대학교

▶ 동국대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 8 ▷ 자연계열 ▷ [문제2] ▷ (3)

문항 및 제시문 [문제2]-(3)

[문제2] 함수 $f(x)=\sin x+4x+1$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 존재하고 미분가능하다.

실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선을 l_1, 곡선 $y=f^{-1}(x)$ 위의 점 $(f(t), t)$에서의 접선을 l_2라 하고, l_1과 l_2가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $g(t)=\tan\theta$라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

(3) $\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx$의 값을 구하시오.

평가기준 및 예시답안 [문제2]-(3)

$$\int_{f(0)}^{f(2\pi)} g(f^{-1}(x))\,dx=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}((\cos t+4)^2-1)dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+8\cos t+15)dt$$

이고

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2t+1}{2}dt}=\left[\frac{\sin 2t}{4}+\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi,$$

문항 분석 결과

2007 개정 수학과 교육과정 성취기준 / 교과서 내용 [수학Ⅱ] 삼각함수

㈐ 삼각함수

② 삼각함수의 배각의 공식, 반각의 공식을 이해한다.

• 삼각함수의 반각 공식: $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos 2x}{2}$

2015 개정 수학과 교육과정(현 교육과정)

1 여러 가지 함수의 미분

[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

• [문제2-(3)]의 평가 기준과 예시 답안에는 현재 교육과정에서 다루지 않는 **'삼각함수의 반각 공식'이 포함되어 있습니다.** **'삼각함수의 반각 공식'은 2007 개정 수학과 교육과정에서는 성취기준에 있었지만, 현재 2015 개정 수학과 교육과정에서는 제외된 내용**입니다. 따라서 이 문항은 교육과정을 벗어난 것으로 판단됩니다.

2. 서울대학교

▶ 서울대학교 ▷ 구술·면접 전형 ▷ 수학 B-1 ▷ [문제 1] ▷ 2-1, 2-2, 2-3, 2-4

문항 및 제시문 [문제1] 2-1, 2-2, 2-3, 2-4

문제 1.

양의 정수 $n(n \geq 2)$에 대하여 수직선 위의 n개의 점 $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$이 다음 [규칙]에 움직이고 있다.

[규칙]

(가) 점 P_k는 수직선 위의 점 $-k$에서 출발하여 속도 v_k로 움직인다.
즉, 시각 t에서 점 P_k의 위치는 $-k+v_k t$이다.

(나) 모든 점들은 동시에 출발하며, 점들의 속도는 다음을 만족한다.

$$0 < v_1 < \cdots < v_n$$

(다) 두 개 이상의 점이 한 곳에서 만나면 그 점들은 모두 사라진다.
(단, 점들이 동시에 같은 위치에 놓이면 "만난다"라고 한다.)

2-1. $n=5$인 경우, 5개의 점들이 움직이는 속도가 다음과 같이 주어져 있다.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	4	6	18	20

사라지지 않고 계속 움직이는 점을 구하시오.

2-2. $n=7$인 경우, 7개의 점들이 움직이는 속도가 다음과 같이 주어져 있다.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
a	4	7	8	b	15	25

사라지지 않고 계속 움직이는 점이 P_1이 되도록 하는 순서쌍 (a, b)를 모두 구하시오.
(단, a, b는 양의 정수)

2-3. $n=100$인 경우, 100개의 점들이 움직이는 속도가 다음과 같이 주어져 있다.

$$v_k = \begin{cases} k^2+d & (1 \leq k \leq 50) \\ k^2+d+9 & (51 \leq k \leq 100) \end{cases}$$

시각 $t=\frac{1}{106}$에서 사라지지 않고 남아 있는 점의 개수를 구하시오.
(단, d는 양의 정수이다.)

2-4. 문제 2-3의 상황에서, 100개의 점 중 원점을 통과한 뒤 사라지는 점의 개수가 50이 되도록 하는 양의 정수 d의 개수를 구하시오. (단, 어떤 점이 원점에서 다른 점과 만나서 사라졌다면, 이 점은 원점을 통과하지 못한 것으로 한다.)

▶ 서울대학교 ▷ 구술 면접전형 ▷ 수학 B-2 ▷ 자연계열 ▷ [문제1] ▷ 1-1, 1-2, 1-3

문항 및 제시문 [문제1] 1-1, 1-2, 1-3

문제 1.

양의 정수 $n(n \geq 2)$에 대하여 수직선 위의 n개의 점 $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$이 다음 [규칙]에 따라 움직이고 있다.

[규칙]

(가) 점 P_k는 수직선 위의 점 $-k$에서 출발하여 속도 v_k로 움직인다.
즉, 시각 t에서 점 P_k의 위치는 $-k+v_k t$이다.

(나) 모든 점들은 동시에 출발하며, 점들의 속도는 다음을 만족한다.

$$0 < v_1 < \cdots < v_n$$

(다) 두 개 이상의 점이 한 곳에서 만나면 그 점들은 모두 사라진다.
(단, 점들이 동시에 같은 위치에 놓이면 "만난다"라고 한다.)

1-1. $n=5$인 경우, 5개의 점들이 움직이는 속도가 다음과 같이 주어져 있다.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
1	4	6	18	20

사라지지 않고 계속 움직이는 점을 구하시오.

1-2. $n=6$인 경우, 6개의 점들이 움직이는 속도가 다음과 같이 주어져 있다.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
13	15	16	17	22	26

원점을 통과한 뒤 사라지는 점의 개수를 구하시오.

1-3. $n=4$인 경우, 4개의 점들이 움직이는 속도가 다음과 같이 주어져 있다.

v_1	v_2	v_3	v_4
12	$3a$	$a+26$	39

단, 제시문의 [규칙]-(나)를 만족하는 실수 a의 범위는 $4 < a < 13$이다.

(1) 가장 먼저 사라지는 점들을 a의 값의 범위에 따라 구하시오.

(2) 두 개의 점만 원점을 통과한 뒤 사라지게 되도록 하는 a의 값의 범위를 구하시오. (단, 어떤 점이 원점에서 다른 점과 만나서 사라졌다면, 이 점은 원점을 통과하지 못한 것으로 한다.)

문항 분석 결과

공교육정상화법의 교과별 적용을 위한 안내(수학) 평가 시 유의사항

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음

- 정규 수업 시간에 지도한 내용이더라도 교육과정 밖의 내용은 출제할 수 없습니다. 이러한 내용은 문항 내에 단서 조건으로 명확히 제시하여도 출제하여 평가할 수 없습니다.
- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

사례 다음은 위반 사례에 해당함

• 고등학교 <수학>에서 변환이라는 용어를 사용한 문항을 출제하여 평가함.

• B-1 [문제1]의 2-1, 2-2, 2-3, 2-4와 B-2 [문제1]의 1-1, 1-2, 1-3의 7개 문제는 모두 제시문에 주어진 '만난다.'와 '사라진다.' 개념을 이해하고 이를 바탕으로 문제를 해결해야 합니다. 그러나 **'만난다.'와 '사라진다.' 는 개념은 2015 개정 수학과 교육과정에서 다루지 않는 용어**입니다.

이 문제에서는 **'만난다.'와 '사라진다.'를 규칙으로 새롭게 정의**하고 있는데, 이는 한국교육과정평가원에서 공개한 '공교육정상화법의 교과별 적용을 위한 안내 자료'에서 소개된 평가 시 유의사항을 벗어나는 것입니다. 해당 자료에서는 *'용어와 기호가 교육과정의 학습 요소에서 제시된 범위를 벗어나거나, 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것을 지양해야 한다.'* 라고 명시하고 있기 때문입니다. 따라서 이 문항은 교육과정을 벗어난 것으로 판단됩니다.

3. 서울시립대학교

▶ 서울시립대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 4 ▷ 자연계열 ▷ [문제4] ▷ (a) (b)

문항 및 제시문 [문제4] (a), (b)

[문제 4] (총 115점)

2 이상의 자연수 n에 대하여 점 A_k의 좌표를 $\left(\cos\left(\frac{k-1}{n}\pi\right), \sin\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\right)$라 하자.
(단, $k=1, 2, \cdots, 2n$)

점 A_1, A_2, $\cdots$, A_{2n}을 꼭짓점으로 하는 정$2n$각형의 변 위를 두 점 P, Q가 시계 반대 방향으로 움직인다.
두 점 P, Q가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 두 점 P, Q는 시각 $t=0$일 때 점 $\mathrm{A}_1(1, 0)$을 출발하여 정$2n$각형을 한 바퀴 돌아 점 A_1에 동시에 도착한다.

(2) 점 P는 변 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ 위를 속력 $\sqrt{2-\frac{k}{2n}}$로 움직이고, 변 $\mathrm{A}_{2n}\mathrm{A}_1$ 위를 속력 1로 움직인다. (단, $k=1, 2, \cdots, 2n-1$)

(3) 점 Q의 속력은 일정하다.

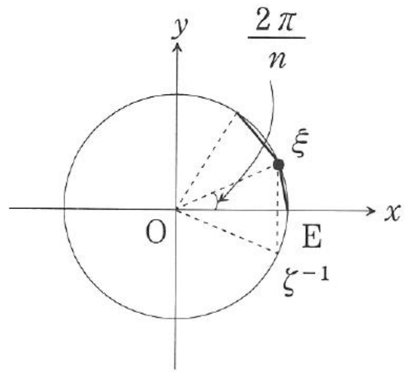
(a) 점 P가 출발한 후 점 A_1에 처음으로 도착하는 시각을 b_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$의 값을 구하여라. (50점)

(b) 점 P가 출발한 후 점 $\mathrm{A}_{n+1}(-1, 0)$에 처음으로 도착하는 시각을 c_n이라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=c_n$까지 점 P와 점 Q가 움직인 거리의 차를 d_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$의 값을 구하여라. (65점)

문항 분석 결과

대학전공수학 현대대수학 8판(김용태, 박승안) p353 정n각형의 작도가능성

주어진 원에 내접하는 정n각형$(n \geq 3)$을 작도하는 문제는 그 원주를 n등분하는 문제와 같고 또한 크기가 $\frac{2\pi}{n}$인 각을 작도하는 문제와 같으며 이 문제는 $\cos\frac{2\pi}{n}$를 작도하는 문제와 같다(보기 5.3.2). 그런데, 주어진 원을 좌표평면 위의 단위원으로 생각하고 또 점 $\mathrm{P}(u, v)$를 복소평면 위의 점 $z = u + vi$에 대응시키면,



$$1, \zeta, \cdots, \zeta^{n-1} \qquad \left(\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

는 정n각형의 꼭지점을 나타내며 이들 복소수는 다항식 $f(x) = x^n - 1$의 근이고 또 $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{n}$이다.

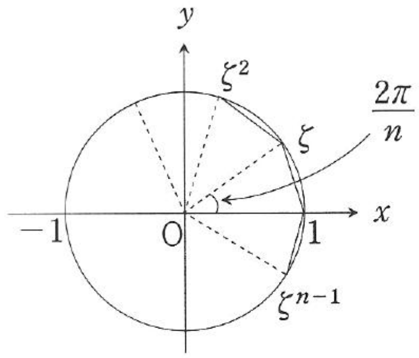
대학전공수학 현대대수학 8판(김용태, 박승안) p408 ‘1의 n제곱근’ 정의

정의 5.9.1 체 K 의 원소 u 가 다항식 $f(x)=x^n-1$ 의 근일 때, 즉 $u^n=1$ 일 때 u 를 K 에서의 單位元 1 의 **n 제곱근**(n-th root of unity) 이라고 한다.

보기 5.9.1 양의 정수 n 에 대하여

$$\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

이라고 할 때, 복소수체 $\mathbb{C}$ 에서의 1 의 n 제곱근 전체의 집합을 U_n 이라고 하면 다음이 성립한다(정리 1.3.9).



$$U_n = \langle \zeta \rangle = \{1, \zeta, \cdots, \zeta^{n-1}\}, \quad \zeta^n = 1$$

- [문제4]의 제시문에 주어진 점의 좌표는 대학교재(현대대수학)에서 다루는 **‘1의 n제곱근’** 의 표현과 동일합니다. 또한 ’점A_1, A_2, · · · A_{2n}을 꼭짓점으로 하는 다각형이 정$2n$각형이 된다.’는 표현은 대학교재(현대대수학)에서 다루는 내용과 유사합니다. 대학교재에서는 ’*원에 내접하는 정n각형을 그리는 문제는 원주를 n등분하는 문제와 같고, 이렇게 만들어진 점의 좌표는 정n각형의 꼭짓점과 같다.*’고 설명하고 있습니다. 여기서 n을 2n으로 바꾸면 [문제4]의 제시문과 동일한 내용이 됩니다. 따라서 해당 문제의 제시문은 대학교재의 내용을 인용한 것으로 판단됩니다.

4. 성균관대학교

▶ 성균관대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 8 ▷ 자연계열 수학 1교시 2번 ▷ [문제2-ii], [문제2-iii]

문항 및 제시문 [문제2-ii], [문제2-iii]

<제시문 2>

이차함수 $y=x^2$ 과 반지름이 r 인 원이 다음 세 조건을 만족시킨다.

- 원의 중심의 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수이다.
- 이차함수 $y=x^2$ 과 원이 서로 다른 네 점에서 만나고, 교점의 y 좌표는 모두 정수이다.
- 네 교점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 사다리꼴이다.

<제시문 3>

최고차항의 계수가 -1 인 사차함수 $y=g(x)$가 $g(x)=g(-x)$를 만족하고, x 축과 x_1, x_2, x_3, x_4 에서 만난다. 또한, 사차함수 $y=g(x)$의 그래프와 이차함수 $y=x^2$ 의 그래프가 서로 다른 네 점 Q, R, S, T 에서 만난다고 가정하자.

(단, $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$이고, $x_k(k=1,2,3,4)$는 정수가 아니다.)

[문제 2 - ii] <제시문 2>에서 $r=4$일 때, 사다리꼴의 넓이를 모두 구하고 그 이유를 논하시오.

[문제 2 - iii] 양의 정수 m, n에 대해 <제시문 3>에서 $x_3=\sqrt{m}$, $x_4=\sqrt{n}$이고, 네 점 Q, R, S, T를 지나는 원의 반지름이 10이라 하자. 이때, <제시문 3>을 만족하는 양의 정수 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하고 그 이유를 논하시오.

채점 기준 [문제2-ii], [문제2-iii]

2-ii	직선의 방정식과 원의 방정식을 올바르게 구할 수 있다.	15 점
2-iii	이차함수와 사차함수를 이해하고, 이로부터 원의 방정식을 올바르게 유도할 수 있다.	15 점

예시 답안 [문제2-ii]

다. <제시문 2>의 조건에 의해 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$가 한 원 위에 있으므로, 선분 $\mathrm{M_1M_2}$는 원의 중심을 지나게 되고 두 직선 AD와 BC는 수직이다. 따라서, $k=0$이다.

이제, 점 C, D가 $y=x^2$ 위의 점이므로, $\mathrm{C}(\sqrt{a}, a), \mathrm{D}(\sqrt{b}, b)$ $(b>a>0)$라 하자. 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$를 지나는 원의 방정식을 $x^2+(y-k)^2=r^2$이라 하면,

$$y^2+(1-2k)y+k^2-r^2=0$$

의 두 근이 a, b이므로, 근과 계수의 관계에 의해

$$a+b=2k-1,\ ab=k^2-r^2$$

이다. 따라서, $k=\dfrac{a+b+1}{2}$, $r^2=\left(\dfrac{a+b+1}{2}\right)^2-ab$이다. $r=4$이므로 $\left(\dfrac{a+b+1}{2}\right)^2-ab=16$이고 <제시문 2>의 조건으로부터 $\dfrac{a+b+1}{2}$는 정수이다. 이 식을 정리하면 $(b-a)^2+2(a+b)=63$이고 $b-a$는 홀수이다. 이로부터 가능한 경우는 다음 표와 같다.

예시 답안 [문제2-iii]

이다. 한편, $S(\sqrt{a}, a)$, $T(\sqrt{b}, b)$라 하면, 네 점 Q, R, S, T를 지나는 원의 방정식은 [문제 2 - ii]에서와 같이

$$x^2 + \left(y - \frac{a+b+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 - ab$$

이다. 근과 계수의 관계로부터

$$a+b = m+n-1,\ ab = mn$$

이므로, 원의 방정식은

$$x^2 + \left(y - \frac{m+n}{2}\right)^2 = \left(\frac{m-n}{2}\right)^2$$

이고, $n-m=20$이다. 이를 ①에 대입하면 $m+n \le 200$이 성립한다. 따라서, 가능한 순서쌍 (m, n)은

$$(1, 21), (2, 22), \cdots, (90, 110)$$

이다. 이 중에서 완전제곱수인 m은 $m = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81$의 9가지이고, 완전제곱수인 n은

문항 분석 결과

2015 개정 수학과 교육과정 평가방법 및 유의사항 [고1 수학] - 도형의 방정식

(다) 평가 방법 및 유의 사항

- 도형의 방정식은 도형을 좌표평면에서 다룰 수 있음을 이해하는 수준에서 다루고, 계산이 복잡한 문제는 다루지 않는다.

2015 개정 수학과 교육과정 교수 학습 자료 [고1 수학] - 도형의 방정식

도형의 방정식에서 계산이 복잡한 문제

✍ **(문항)**

세 점 $(2, -1)$, $(3, 0)$, $(5, -2)$를 지나는 원의 방정식을 구하시오.

✍ **(답안 및 해설)**

구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이라 하자.
세 점이 이 원의 방정식을 지나므로 각각 대입하면
$2A-B+C=-5$, $3A+C=-9$, $5A-2B+C=-29$ 이므로
연립하여 풀면 $A=-7$, $B=3$, $C=12$
따라서 구하는 원의 방정식은 $x^2+y^2-7x+3y+12=0$ 이다.

위 문제에서 미지수가 3개인 연립방정식의 풀이는 성취기준에 포함되지 않으며, 학생들에게 복잡한 계산을 유도하는 것으로 볼 수 있다.

- [문제2-ii], [문제2-iii]은 원의 방정식을 구하는 과정에서 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용하여 식을 변형하는 등 복잡한 계산이 포함되어 있습니다. 이는 도형의 방정식과 관련된 교육과정 평가방법 및 유의사항에서 제시된 '도형의 방정식은 도형을 좌표평면에서 다룰 수 있음을 이해하는 수준에서 다루고, 계산이 복잡한 문제는 다루지 않는다.'라는 것을 준수하지 않는 것으로 판단됩니다. 이러한 복잡한 계산은 학생들의 학습에 부담을 줄 수 있으며, 수학에 대한 흥미를 떨어뜨릴 수 있습니다. 따라서 이러한 문제는 교육과정에서 다루지 않는 것이 바람직합니다.

▶ 성균관대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 11 ▷자연계열 수학 2교시 2번 ▷ [문제2-Ⅰ], [문제2-Ⅱ], [문제2-Ⅲ]

문항 및 제시문 [문제2-Ⅰ], [문제2-Ⅱ], [문제2-Ⅲ]

<제시문 1>

자연수 n에 대하여, 수열 $\{t_n\}$을 다음과 같이 정의하자. n이 홀수일 때 $t_n=3$이고, n이 짝수일 때 $t_n=4$이다. 점 $\mathrm{P}_0(-1,0)$에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_1}{12}\pi\right)$인 직선이 원 $x^2+y^2=1$과 다시 만나는 점을 P_1이라 하자. 자연수 n에 대하여, 점 P_n에서 그은 기울기가 $\tan\left(\frac{t_{n+1}}{12}\pi\right)$인 직선이 원 $x^2+y^2=1$과 다시 만나는 점을 P_{n+1}이라 하자. 만약 이 직선이 원과 접할 경우, $\mathrm{P}_{n+1}=\mathrm{P}_n$이다.

<제시문 2>

음이 아닌 정수 n에 대하여, $A(n)$을 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이라 하자. (단, 세 점 P_n, P_{n+1}, P_{n+2} 중에서 두 점이 서로 일치할 경우, $A(n)=0$이다.)

[문제 2-ⅰ] $0\le n\le 7$인 정수 n에 대하여 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}$의 길이가 항상 일정함을 보이고, 그 값을 구하시오.
(단, 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}$는 두 점 P_n, P_{n+2}에 의하여 나누어지는 원 $x^2+y^2=1$의 두 부분 중 길이가 짧은 것으로 한다.)

[문제 2-ⅱ] 점 P_{2024}의 좌표를 구하고, 그 이유를 논하시오.

[문제 2-ⅲ] <제시문 2>에 주어진 $A(n)$의 최댓값을 구하고, 그 이유를 논하시오.

문항 해설 [문제2-Ⅰ], [문제2-Ⅱ]

[문제 2-ⅰ] : <제시문 1>의 수열, 원과 직선의 위치 관계를 통해 원 위의 점들의 규칙성을 찾고 사인법칙을 이용하여 호의 길이가 일정함을 보이는 문제이다. 수학Ⅰ에서 배운 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 의미를 파악하고 원과 직선의 위치 관계를 통해 점의 위치를 기하학적으로 나타내면 규칙성을 파악할 수 있다. $\mathrm{P_n}$과 $\mathrm{P_{n+1}}$의 관계를 올바르게 파악한다면 호의 길이가 일정함을 사인법칙을 통해 보일 수 있다.

[문제 2-ⅱ] : [문제 2-ⅰ]에서 기하학적으로 $\mathrm{P_n}$과 $\mathrm{P_{n+1}}$을 나타내 보고 $\mathrm{P_n}$을 위치별로 나열해 보면 규칙성을 발견할 수 있다. 그 결과로 주어진 문제의 점의 좌표를 구할 수 있다.

[문제 2-ⅲ] : $\mathrm{P_n}$의 규칙성을 찾고 그 결과로 삼각형 $\mathrm{P_nP_{n+1}P_{n+2}}$이 같은 모양인 경우를 찾아내고 그것을 이용하여 $A(n)$의 최댓값이 되는 경우가 한 선분이 지름이 되는 경우이다. 이를 직관적으로 찾아내고 식으로 표현할 수 있어야 한다.

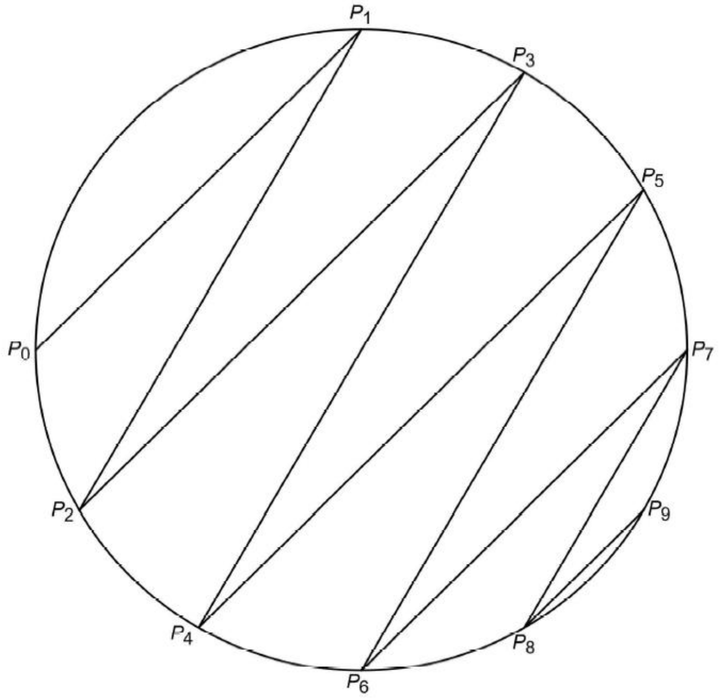
채점 기준 [문제2-Ⅱ]

하위 문항	채점 기준	배점
2-ⅰ	원과 직선이 만나는 교점들을 원 위에 표시하고, 원주각과 중심각의 성질을 활용하여 이러한 원 위의 점들이 규칙적인 패턴을 이룬다는 것을 이해하고, 이웃하는 두 점으로부터 만들어지는 호의 길이를 구할 수 있다.	10 점
2-ⅱ	원과 직선이 두 점에서 만나는 경우와 접하는 경우를 구분할 수 있고, 원 위의 점들이 이루는 규칙성으로부터 P_{2024}의 좌표를 구체적으로 구할 수 있다.	10 점
2-ⅲ	제시문에 주어진 삼각형의 형태를 이해하고, 이 삼각형의 넓이가 언제 최대가 되는지를 논할 수 있고, 구체적인 최댓값을 구할 수 있다.	10 점

예시 답안 [문제2-Ⅰ], [문제2-Ⅱ]

[문제 2-1]

이로부터 얻어지는 점들 $P_0, P_1, \cdots, P_9$을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.

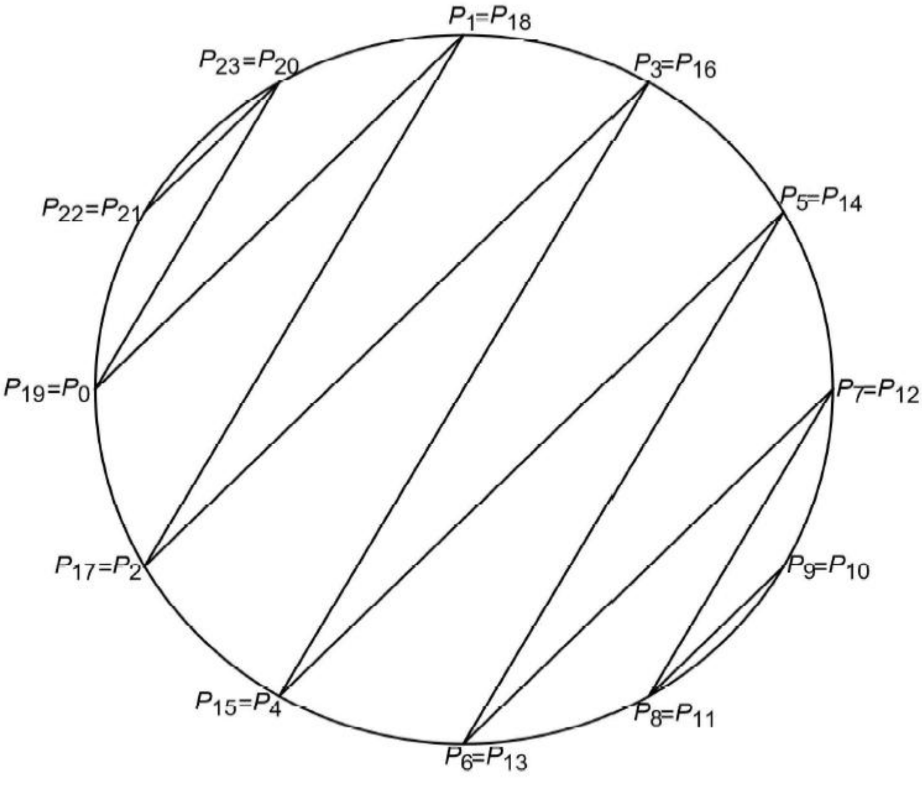


[문제 2-2]

[문제 2 -ⅱ]

점 P_9에서 그은 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선은 원과 접하게 되므로, $P_{10} = P_9$이 된다. 이제 점 P_{10}에서 그은 기울기가

점들 $P_0, P_1, \cdots, P_{23}$을 그림으로 나타내면 다음 그림과 같다.



문항 분석 결과

2015 개정 수학과 교육과정 성취기준 수학Ⅰ - 수열의 귀납적 정의

③ 수학적 귀납법
[12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.

2015 개정 수학과 교육과정 평가기준 수학Ⅰ - 수열의 귀납적 정의

교육과정 성취기준		평가기준	
[12수학Ⅰ03-06] 수열의 귀납적 정의를 이해한다.	[평가준거 성취기준 ①] 수열의 귀납적 정의를 이해할 수 있다.	상	수열과 관련된 실생활 문제에서 인접한 항 사이의 관계를 추론하고, 이를 귀납적 정의를 이용하여 표현할 수 있다.
		중	수열의 귀납적 정의에 대해 말할 수 있고, 관계가 간단한 수열을 귀납적으로 정의할 수 있다.
		하	귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항을 구할 수 있다.

수학Ⅰ 교과서(교학사) 수학Ⅰ - 수열의 귀납적 정의

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서

(ⅰ) 첫째항 a_1의 값
(ⅱ) 이웃하는 두 항 a_n, a_{n+1} $(n=1, 2, 3, \cdots)$ 사이의 관계식

이 주어질 때, 이 관계식에 $n=1, 2, 3, \cdots$을 차례로 대입하면 수열 $\{a_n\}$의 각 항이 정해진다.

일반적으로 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것을 수열의 **귀납적 정의**라고 한다.

- [문제2-1], [문제2-2], [문제2-3]은 수열의 귀납적 정의 이용하여 제시문에 정의된 수열 P_n의 규칙성을 찾아 이를 이용해 해결하는 문제입니다. 여기서 수열 P_n은 수열 t_n이 포함된 기울기가 삼각함수인 직선이 단위원과 만나는 점의 좌표로 정의하고 있으며, 이렇게 정의된 수열 P_n의 규칙성을 찾아야 합니다.

문항해설에 있는 원과 직선이 있는 **기하학적 도형을 보더라도 수열 P_n의 규칙성을 찾는 과정은 상당히 복잡**합니다. 그 뿐만 아니라 [문제2-2]의 문항해설에서 '점 P_9에서 그은 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$이 되는 직선은 원과 접하며 $\mathrm{P}_9 = \mathrm{P}_{10}$이 된다.' 라는 것을 확인하기 위해서는 상당히 복잡한 계산과정을 거쳐야 합니다. 또한, 수열의 귀납적 정의와 관련된 **교육과정 평가기준의 상 수준에는 *'수열과 관련된 실생활 문제에서 인접한 항 사이의 관계를 추론하고...'* 라고 되어 있는데, [문제2-1], [문제2-2], [문제2-3]은 실생활 문제에 해당하지 않습니다.**

따라서, 세 문항 모두 *'수열의 귀납적 정의를 이해한다.'* 라는 동일 성취기준을 교육과정 출제 근거로 제시하고 있지만, **수열의 귀납적 정의를 이해하는 것 보다 '삼각함수의 이해', '원과 직선과의 관계', '원주각・중심각・호의 길이' 를 이해하는 것이 더 중심이 되는 문항**으로 교육과정 성취기준의 수준을 벗어난 문항으로 판단됩니다.

5. 연세대학교

▶ 연세대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 4 ▷ 자연계열 수학 2번 ▷ [문제2-1], [문제2-2]

문항 및 제시문 [문제2-1], [문제2-2]

[문제 2] 모든 자연수 n에 대하여 $a_n = n!$이다. 모든 항이 자연수인 두 수열 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$은 1보다 큰 모든 자연수 n에 대하여 아래의 성질을 만족시킨다.

(가) b_n의 모든 소인수는 n 이하이다.
(나) $3\log_2 n \le c_n \le 4\log_2 n$
(다) b_n은 $a_n^{c_n}$의 약수가 아니다.

다음 수열의 수렴 및 발산을 조사하고 수렴한다면 극한값을 구하시오.

[문제 2-2] $\left\{\dfrac{b_n}{n^2}\right\}$ **[10점]**

문항 해설 [문제2-ii], [문제2-iii]

[문제 2-2]
주어진 조건 (가), (다)에 의하여 각 소인수가 n 이하인 b_n이 $a_n^{c_n}$의 약수가 아니므로 적어도 하나의 소인수 p_n이 존재하여 $p_n^{c_n+1}$이 b_n의 약수이다. 따라서 조건 (나)에 의하여
$b_n \ge p_n^{c_n+1} > p_n^{3\log_2 n} \ge 2^{3\log_2 n} = n^3$이다.

문항 분석 결과

대학전공수학 정수론 8판(박승안) p43 소수에 대한 정리

정의 1.4.1 두 정수 a, d에 대하여

$$a = d\,e$$

인 정수 e가 존재할 때, d를 a의 **약수**(divisor) 또는 **인수**(factor)라 하고 a를 d의 **배수**(multiple)라고 하며 이 사실을 $d \mid a$로 나타낸다.

따름정리 2.1.4 素數 p와 정수 $a_1, \cdots, a_n, a$에 대하여 다음이 성립한다.
(1) $p \mid a_1 \cdots a_n$이면, 적당한 i $(1 \le i \le n)$에 대하여 $p \mid a_i$이다.

정리 2.1.5 정수 a에 대하여 $a \ge 2$이면, a의 소인수가 적어도 하나 존재한다.

대학전공수학 정수론 8판(박승안) 유일 인수분해 정리 증명과정

이제 $t \ge 2$이라고 가정하자. 이 때, $q_1 \mid p_1 p_2 \cdots p_s$이므로 $q_1 \mid p_i$인 p_i가 존재하고 이때 $q_1 = p_i$이다 (따름정리 2.1.4, 정의 2.1.1). 따라서 필요하다

2015 개정 수학과 교육과정 학습요소 ‘수열’ 기호 표현

(가) 학습 요소

- 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$

공교육정상화법의 교과별 적용을 위한 안내자료(수학) 평가 시 유의사항

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음

- 정규 수업 시간에 지도한 내용이더라도 교육과정 밖의 내용은 출제할 수 없습니다. 이러한 내용은 문항 내에 단서 조건으로 명확히 제시하여도 출제하여 평가할 수 없습니다.
- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

사례 다음은 위반 사례에 해당함

- $[x]$과 같은 가우스 함수, f_n과 같이 해석학에서 사용하는 함수열의 기호 등 교육과정에서 다루는 범위를 넘어서는 용어와 기호를 문항 내의 조건에서 정의한 뒤 이를 활용하는 문항을 출제하여 평가함.

- [문제2]의 제시문과 [문제2-2]의 문항 해설에 잇는 $a_n^{c_n}$, $p_n^{c_n+1}$과 같은 수열의 기호 표현은 고등학교 수학과 교육과정에서 다루지 않는 기호표현에 해당합니다. 뿐만 아니라 [문제2-2[의 문항해설에는 대학전공 수학교재인 정수론에서 다루는 증명방법이 포함되어 있습니다. 따라서 본 문항은 고등학교 교육과정의 수준과 범위를 벗어난 문제로 판단됩니다.

6. 이화여자대학교

▶ 이화여자대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 7 ▷ 자연계열 1 ▷ [문항 1] ▷ (2), (3), (4), (5)

문항 및 제시문 [문항 1] - (2), (3), (4), (5)

[문항 1] 실수 a가 $-1<a<1$일 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

(2) 치환적분을 적용하여 문항 (1)로부터 다음 등식을 유도하시오.

$$2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\sin\theta)\,d\theta$$

(3) 문항 (2)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\boxed{a^{2^{n+1}}}+1+\boxed{2a^{2^n}\sin\theta}\right)d\theta$$

(4) 다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$2\pi\ln\left(1-\boxed{a^{2^n}}\right) \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\boxed{a^{2^{n+1}}}+1+\boxed{2a^{2^n}\sin\theta}\right)d\theta \le 2\pi\ln\left(1+\boxed{a^{2^n}}\right)$$

(5) 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 다음 정적분을 계산하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta$$

채점 기준 [문항 1] - (2)

$1-2\sin^2\theta=\cos2\theta$임을 이용하여 아래의 등식이 성립함을 보임.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1-2a\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2(1-2\sin^2\theta))\,d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\cos2\theta)\,d\theta$$

채점 기준 [문항 1] – (4)

$0 \le a^{2^n} < 1$ 임을 언급함.
$(1-a^{2^n})^2 \le a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}\sin\theta \le (1+a^{2^n})^2$ 임을 보임.
위 부등식에 로그함수를 적용하여 아래의 부등식을 유도함.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-a^{2^n})^2 d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}\sin\theta)\, d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+a^{2^n})^2 d\theta$$

예시 답안 [문항 1] – (3)

$n=k$일 때 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}}+1+2a^{2^k}\sin\theta)\,d\theta$이 성립한다고 가정하자.

위의 식에서 $a^{2^k}=\beta$라고 하면 $a^{2^{k+1}} = a^{2^k \cdot 2} = (a^{2^k})^2 = \beta^2$이고 $\beta^4 = (\beta^2)^2 = a^{2^{k+2}}$이 성립한다.
이 때 $-1<a<1$이므로 $0 \le a^{2^k} = \beta < 1$이고, $0 \le a^{2^{k+1}} = \beta^2 < 1$이다. 그러므로 $n=1$일

예시 답안 [문항 1] – (4)

[풀이] $-1<a<1$이므로 $0 \le a^{2^n} < 1$이고 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$에 대하여 $-1 \le \sin\theta \le 1$이므로 아래의 부등식이 성립한다.

$$(1-a^{2^n})^2 = a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}(-1) \le a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}\sin\theta \le a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}\cdot 1 = (1+a^{2^n})^2$$

위 부등식에 밑이 1보다 큰 로그함수가 증가함수인 것을 적용하면 아래의 부등식이 성립한다.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-a^{2^n})^2 d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}\sin\theta)\, d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+a^{2^n})^2 d\theta$$

예시 답안 [문항 1] – (5)

[풀이] 문항 (3)과 문항 (4)에 의하여 아래의 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$$\frac{2\pi\ln(1-a^{2^n})}{2^n} \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta \le \frac{2\pi\ln(1+a^{2^n})}{2^n}$$

문항 분석 결과

2007 개정 수학과 교육과정 성취기준 / 교과서 내용 * [수학Ⅱ] 삼각함수

㈐ 삼각함수

② 삼각함수의 배각의 공식, 반각의 공식을 이해한다.

• 삼각함수의 배각 공식: $1-2\sin^2\theta = \cos 2\theta$

2015 개정 수학과 교육과정(현 교육과정) 성취기준 ** 삼각함수

1 여러 가지 함수의 미분

[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

2015 개정 수학과 교육과정 학습요소 *** '수열' 기호 표현

(가) 학습 요소

- 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$

공교육정상화법의 교과별 적용을 위한 안내(수학) **** 평가 시 유의사항

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음

- 정규 수업 시간에 지도한 내용이더라도 교육과정 밖의 내용은 출제할 수 없습니다. 이러한 내용은 문항 내에 단서 조건으로 명확히 제시하여도 출제하여 평가할 수 없습니다.
- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

사례 다음은 위반 사례에 해당함

- $[x]$과 같은 가우스 함수, f_n과 같이 해석학에서 사용하는 함수열의 기호 등 교육과정에서 다루는 범위를 넘어서는 용어와 기호를 문항 내의 조건에서 정의한 뒤 이를 활용하는 문항을 출제하여 평가함.

2015 개정 수학과 교육과정 평가 방법 및 유의 사항*****	지수와 로그 성질

3) 평가 방법 및 유의 사항

지수함수와 로그함수 영역의 평가 방법 및 유의 사항은 다음과 같다.

- 지수와 로그의 성질에 대한 평가에서는 지수와 로그의 기본 성질을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 평가하는 데 중점을 두고, 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.

2015 개정 수학과 교육과정 성취기준 (수학Ⅱ) ******	부정적분

[12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

대학전공수학 해석학입문(노정학) p198 *******	적분의 비교정리

따름정리 6.17 (적분의 비교정리) 함수 $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$는 $[a, b]$에서 적분가능하고 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) \leq g(x)$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

- [문항1]-(2)의 등식을 유도하는 과정에서 '삼각함수의 배각공식($1-2\sin^2\theta = \cos 2\theta$)' 을 이용해야 하며 이는 채점기준에도 제시되어 있습니다. 하지만 **'삼각함수의 배각공식'** 은 현 교육과정인 2015 개정 수학과 교육과정 성취기준에서 다루지 않는 내용입니다. (*, ** 참고)
- [문항1]-(3)에 있는 $a^{2^{n+1}}$, a^{2^n}와 같은 **교육과정에서 다루지 않는 기호 표현**이 포함되어 있습니다.(***참고) 한국교육과정평가원에서 공개한 '공교육정상화법의 교과별 적용 안내 자료(수학)' 의 평가 시 유의사항에서도 '*용어와 기호가 교육과정의 학습 요소의 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 한다.*' 라고 명시되어 있습니다.(****참고) 또한, 수학적 귀납법을 이용하여 증명하는 과정에서 **지수의 성질을 이용한 지나치게 복잡한 계산과정이 포함**되어 있습니다. 하지만 지수의 성질과 관련된 교육과정 교수학습 방법 및 유의사항에는 '*지수와 로그의 성질에 대한 평가에서는 지수와 로그의 기본 성질을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 평가하는 데 초점을 둬 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.*' 라고 명시되어 있습니다.(*****참고) 따라서 [문항1]-(3)은 교육과정 내의 기호 표현과 교수 학습 방법 및 유의사항을 준수하지 않는 것을 판단됩니다.
- [문항1]-(4)는 위 [문항1]-(3)과 동일하게 $a^{2^{n+1}}$, a^{2^n}와 같은 **교육과정에서 다루지 않는 기호 표현**이 포함되어 있습니다.(***참고). 뿐만 아니라 [문항1]-(4)에 주어진 부등식을 증명하는 과정에서 **교육과정에서 다루지 않는 '적분의 비교 정리' 를 사용**하고 있습니다. 고등학교 <수학Ⅱ>의 적분과 관련된 성취기준에는 '*함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 적분을 구할 수 있다.*' 라고 제시되어 있으며 부등식과 관련된 적분의 성질은 성취기준으로 다루지 않습니다.(******참고) 부등식과 관련된 적분의 성질인 '적분의 비교 정리' 는 대학과정의(해석학)에서 다루고 있는 내용입니다.(*******참고)
- **[문항1]-(5)의** 예시답안에서는 [문항1]-(4)에 정의된 부등식이 성립한다는 가정 하에 풀이를 하고 있습니다. 그러나 [문항1]-(4)에 정의된 부등식은 대학과정에서 배우는 '적분의 비교 정리'를 이용하여 증명된 것이기 때문에, [문항1]-(5)도 대학과정의 내용을 다루었다고 판단할 수 있습니다. 따라서 문제를 해결하기 위해서는 [문항1]-(4)에 대한 이해와 함께, 대학과정에서 배우는 '적분의 비교 정리'에 대한 이해가 필요합니다.

▶ 이화여자대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 10 ▷ 자연계열 II ▷ [문항 1] ▷ (2), (3), (4)

문항 및 제시문 [문항 1] – (2), (3), (4)

[문항 1] 실수 a가 $-1<a<1$일 때 다음 물음에 답하시오. [40점]

(2) 문항 (1)로부터 다음 등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\boxed{a^{2^{n+1}}}+1+\boxed{2a^{2^n}\sin\theta}\right)d\theta$$

(3) 다음 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 보이시오.

$$2\pi\ln\left(1-\boxed{a^{2^n}}\right) \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\boxed{a^{2^{n+1}}}+1+\boxed{2a^{2^n}\sin\theta}\right)d\theta \le 2\pi\ln\left(1+\boxed{a^{2^n}}\right)$$

(4) 다음 정적분을 수열의 극한의 대소관계를 이용하여 계산하시오.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta$$

채점 기준 [문항 1] – (2)

$1-2\sin^2\theta=\cos2\theta$임을 이용하고, $2\theta=t$를 치환하여 아래의 등식이 성립함을 보임.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2(1-2\sin^2\theta))\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\int_{-\pi}^{0} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt+\int_{0}^{\pi} \ln(a^4+1+2a^2\cos t)\,dt\right\}$$

예시 답안 [문항 1] – (2)

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2(1-2\sin^2\theta))\,d\theta \quad (1-2\sin^2\theta=\cos2\theta)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^4+1+2a^2\cos2\theta)\,d\theta \qquad \left(t=2\theta \Rightarrow d\theta=\frac{1}{2}dt,\ t\in[-\pi,\pi]\right)$$

$n=k$일 때 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2^k}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{k+1}}+1+2a^{2^k}\sin\theta)\,d\theta$이 성립한다고 가정하자.

위의 식에서 $a^{2^k}=\beta$라고 하면 $a^{2^{k+1}}=a^{2^k\cdot 2}=(a^{2^k})^2=\beta^2$이고 $\beta^4=(\beta^2)^2=a^{2^{k+2}}$이 성립한다.
이 때 $-1<a<1$이므로 $0\le a^{2^k}=\beta<1$이고, $0\le a^{2^{k+1}}=\beta^2<1$이다. 그러므로 $n=1$일

예시 답안 [문항 1] – (3)

[풀이]

$-1 < a < 1$이므로 $0 \le a^{2^n} < 1$이고 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$에 대하여 $-1 \le \sin\theta \le 1$이므로 아래의 부등식이 성립한다.

$$(1-a^{2^n})^2 = a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}(-1) \le a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}\sin\theta \le a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n} \cdot 1 = (1+a^{2^n})^2$$

위 부등식에 밑이 1보다 큰 로그함수가 증가함수인 것을 적용하면 아래의 부등식이 성립한다.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-a^{2^n})^2 d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^{2^{n+1}} + 1 + 2a^{2^n}\sin\theta) d\theta \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(1+a^{2^n})^2 d\theta$$

예시 답안 [문항 1] – (4)

[풀이]

문항 (2)과 문항 (3)에 의하여 아래의 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

$$\frac{2\pi\ln(1-a^{2^n})}{2^n} \le \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2+1+2a\sin\theta)d\theta \le \frac{2\pi\ln(1+a^{2^n})}{2^n}$$

문항 분석 결과

2007 개정 수학과 교육과정 성취기준 / 교과서 내용 * [수학Ⅱ] 삼각함수

(다) 삼각함수

② 삼각함수의 배각의 공식, 반각의 공식을 이해한다.

• 삼각함수의 배각 공식: $1-2\sin^2\theta = \cos2\theta$

2015 개정 수학과 교육과정(현 교육과정) 성취기준 ** 삼각함수

1 여러 가지 함수의 미분

[12미적02-01] 지수함수와 로그함수의 극한을 구할 수 있다.

[12미적02-02] 지수함수와 로그함수를 미분할 수 있다.

[12미적02-03] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.

[12미적02-04] 삼각함수의 극한을 구할 수 있다.

[12미적02-05] 사인함수와 코사인함수를 미분할 수 있다.

문항 분석 결과

2015 개정 수학과 교육과정 학습요소 *** ‘수열’ 기호 표현

(가) 학습 요소

- 수열, 항, 일반항, 공차, 등차수열, 등차중항, 공비, 등비수열, 등비중항, 귀납적 정의, 수학적 귀납법, a_n, $\{a_n\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_k$

공교육정상화법의 교과별 적용을 위한 안내(수학) **** 평가 시 유의사항

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음

- 정규 수업 시간에 지도한 내용이더라도 교육과정 밖의 내용은 출제할 수 없습니다. 이러한 내용은 문항 내에 단서 조건으로 명확히 제시하여도 출제하여 평가할 수 없습니다.
- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

사례 다음은 위반 사례에 해당함

- $[x]$과 같은 가우스 함수, f_n과 같이 해석학에서 사용하는 함수열의 기호 등 교육과정에서 다루는 범위를 넘어서는 용어와 기호를 문항 내의 조건에서 정의한 뒤 이를 활용하는 문항을 출제하여 평가함.

2015 개정 수학과 교육과정 평가 방법 및 유의 사항***** 지수와 로그 성질

3) 평가 방법 및 유의 사항

지수함수와 로그함수 영역의 평가 방법 및 유의 사항은 다음과 같다.

- 지수와 로그의 성질에 대한 평가에서는 지수와 로그의 기본 성질을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 평가하는 데 중점을 두고, 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.

2015 개정 수학과 교육과정 성취기준 (수학Ⅱ) ****** 부정적분

[12수학Ⅱ03-02] 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

대학전공수학 해석학입문(노정학) p198 ******* 적분의 비교정리

따름정리 6.17 (적분의 비교정리) 함수 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$는 $[a, b]$에서 적분가능하고 모든 $x \in [a, b]$에 대하여 $f(x) \le g(x)$이면 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

- **[문항1]-(2)**에 주어진 등식이 성립하는 과정에서 '삼각함수의 배각공식($1-2\sin^2\theta=\cos2\theta$)' 을 이용해야 합니다 . 하지만 **'삼각함수의 배각공식'** 은 현 교육과정인 2015 개정 수학과 교육과정 성취기준에서 다루지 않는 내용입니다. (*, ** 참고) 그리고 [문항1]-(2)에 있는 $a^{2^{n+1}}$, a^{2^n}는 **고등학교 교육과정에서 다루지 않는 기호**입니다.(***참고) 한국교육과정평가원에서 공개한 '공교육정상화법의 교과별 적용 안내 자료(수학)' 의 평가 시 유의사항에서도 *'용어와 기호가 교육과정의 학습 요소의 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 한다.'* 라고 명시되어 있습니다.(****참고) 또한, 문제에 주어진 등식이 성립함을 증명하는 과정에서 **지수의 성질을 이용한 지나치게 복잡한 계산과정이 포함**되어 있습니다. 하지만 지수의 성질과 관련된 교육과정 교수학습 방법 및 유의사항에는 *'지수와 로그의 성질에 대한 평가에서는 지수와 로그의 기본 성질을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 평가하는 데 초점을 둬 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.'* 라고 명시되어 있습니다.(*****참고) 따라서 [문항1]-(3)은 교육과정 내의 기호 표현과 교수 학습 방법 및 유의사항을 준수하지 않는 것을 판단됩니다.
- **[문항1]-(3)에도 위** [문항1]-(2)와 같이 **교육과정에서 다루지 않는 기호가 포함**되어 있습니다. (***, ****참고) 뿐만 아니라 [문항1]-(3)에 주어진 부등식을 증명하는 과정에서 **교육과정에서 다루지 않는 '적분의 비교 정리' 를 사용**하고 있습니다. 고등학교 <수학Ⅱ>의 적분과 관련된 성취기준에는 *'함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 적분을 구할 수 있다.'* 라고 제시되어 있으며 부등식과 관련된 적분의 성질은 성취기준으로 다루지 않습니다.(******참고) 부등식과 관련된 적분의 성질인 '적분의 비교 정리' 는 대학과정의(해석학)에서 다루고 있는 내용입니다.(*******참고)
- **[문항1]-(4)**는 [문항1]-(3)에 정의된 부등식이 성립한다는 가정 하에 풀이를 하고 있습니다(예시답안). 그러0나 [문항1]-(3)에 정의된 **부등식은 대학과정에서 배우는 '적분의 비교 정리'를 이용**하여 증명된 것이기 때문에 [문항1]-(4)도 대학과정의 내용을 다루었다고 판단할 수 있습니다. 따라서 문제를 해결하기 위해서는 [문항1]-(3)에 대한 이해와 함께, 대학과정에서 배우는 '적분의 비교 정리'에 대한 이해가 필요합니다.

7. 중앙대학교

▶ 중앙대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 12 ▷ 자연계열 II ▷ [문제 2-1]

문항 및 제시문 [문제 2-1]

[문제 2-1] 닫힌구간 $[-1, 5]$에서 함수

$$f(x) = \int_{-1}^{x} (t^2+5)\left\{1-2\sin\left(\frac{\pi t}{t^2+5}\right)\right\} dt$$

의 최댓값을 구하시오. [10점]

예시 답안 및 정답 [문제 2-1]

[문제 2-1]

$f'(x) = (x^2+5)\left\{1-2\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right)\right\}$이므로 $f(x)$는 $\frac{\pi x}{x^2+5} = \frac{\pi}{6} + 2n\pi$, $\frac{\pi x}{x^2+5} = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi$일 때, 극값을 가질 수 있다. 하지만 $f'(0) \neq 0$이고, $x \neq 0$일 때

문항 분석 결과

2015 개정 수학과 교육과정 교수 학습 방법 및 유의 사항 삼각함수가 포함된 방정식

- 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 해석하거나 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 간단한 경우만 다루되, 주어진 구간 안에서 해를 구하는 것만 다룬다.

2015 개정 수학과 교육과정 교수 학습 자료 삼각함수가 포함된 방정식

삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 교수·학습 상황에서 매우 어려운 문제로 다루어질 수도 있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 학습 부담 및 학습량 감축을 고려하여, 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 해석하거나 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 간단한 것만 다루도록 제한하였다. 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프와 연결 지어 좌변과 우변의 교점 또는 범위를 구하여 풀 수 있도록 하고, 사인법칙과 코사인법칙을 활용하는 문제를 해결하는 과정에서 방정식이나 부등식을 풀어야 하는 경우에 활용될 수 있도록 다룬다. 이때 방정식이나 부등식의 해는 주어진 구간에서의 특수해만 구하도록 한다.

삼각함수가 포함된 방정식(삼각방정식)의 일반해

삼각방정식의 특수해를 β라 하고, n을 임의의 정수라고 하면 삼각방정식의 일반해는 다음과 같다.

(1) $\sin x = a$ $(|a| \leq 1)$의 일반해 : $x = n\pi + (-1)^n\beta$

(2) $\cos x = a$ $(|a| \leq 1)$의 일반해 : $x = 2n\pi + \beta$

(3) $\tan x = a$ $(|a| \leq 1)$의 일반해 : $x = n\pi + \beta$

• [문제 2-1]에 주어진 함수 $f(x)$의 극값을 구하기 위해서는 삼각함수가 포함된 방정식 $1-2\sin\left(\frac{\pi x}{x^2+5}\right) = 9$을 풀어야 합니다. 그 과정에서 구한 $\frac{\pi}{6}+2n\pi$, $\frac{5\pi}{6}+2n\pi$는 **'삼각함수의 일반해'** 에 해당합니다. 하지만 교육과정에서는 '삼각함수의 일반해'는 다루지 않습니다.

8. 한국외국어대학교

▶ 한국외국어대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 5 ▷ 자연계열 3번

문항 및 제시문 3번

다음 조건을 만족시키는 실수 t의 개수를 구하시오.

(가) $-6 \le t \le 6$

(나) $\sin^2(t^2-1)+\sin(t^2-1)-1=0$

예시 답안 및 정답 [문항 2-1]

또한, 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$를 만족하는 실수 x는 열린구간 $(0, \pi)$에 속하는 α와 $\pi-\alpha$ 둘 뿐이다.

따라서 $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$가 되는 실수 x는

$\alpha+2n\pi$, $(\pi-\alpha)+2n\pi$ (n은 정수)

문항 분석 결과

2015 개정 수학과 교육과정 교수 학습 방법 및 유의 사항 삼각함수가 포함된 방정식

- 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 해석하거나 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 간단한 경우만 다루되, 주어진 구간 안에서 해를 구하는 것만 다룬다.

2015 개정 수학과 교육과정 교수 학습 자료 삼각함수가 포함된 방정식

삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 교수학습 상황에서 매우 어려운 문제로 다루어질 수도 있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 학습 부담 및 학습량 감축을 고려하여, 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 해석하거나 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 간단한 것만 다루도록 제한하였다. 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프와 연결 지어 좌변과 우변의 교점 또는 범위를 구하여 풀 수 있도록 하고, 사인법칙과 코사인법칙을 활용하는 문제를 해결하는 과정에서 방정식이나 부등식을 풀어야 하는 경우에 활용될 수 있도록 다룬다. 이때 방정식이나 부등식의 해는 주어진 구간에서의 특수해만 구하도록 한다.

삼각함수가 포함된 방정식(삼각방정식)의 일반해

삼각방정식의 특수해를 β라 하고, n을 임의의 정수라고 하면 삼각방정식의 일반해는 다음과 같다.

(1) $\sin x = a$ $(|a| \le 1)$의 일반해 : $x = n\pi + (-1)^n\beta$

(2) $\cos x = a$ $(|a| \le 1)$의 일반해 : $x = 2n\pi + \beta$

(3) $\tan x = a$ $(|a| \le 1)$의 일반해 : $x = n\pi + \beta$

- [문제 3번]의 예시답안에는 삼각함수가 포함된 방정식 $\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$가 되는 정수 x의 값을 구하는 과정이 포함되어 있습니다. 그리고 방정식을 만족하는 x값을 $a+2n\pi$와 $(\pi-a)+2n\pi$로 나타내고 있습니다. 하지만 $a+2n\pi$, $(\pi-a)+2n\pi$는 **'삼각함수의 일반해'** 에 해당합니다. 하지만 교육과정에서는 '삼각함수의 일반해' 는 다루지 않습니다.

▶ 한국외국어대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 5 ▷ 자연계열 6번

문항 및 제시문 6번

임의의 함수 $f(x)$에 대해 실수 $<f(x)>$를 다음과 같이 정의하자.

$$<f(x)>=\begin{cases} -1 & (f(x)\text{가 } x=0\text{에서 불연속일 때}) \\ 0 & (f(x)\text{가 } x=0\text{에서 연속이지만 미분가능하지 않을 때}) \\ 1 & (f(x)\text{가 } x=0\text{에서 미분가능할 때}) \end{cases}$$

각각의 자연수 n에 대해 함수 $f_n(x)$를

$$f_n(x)=\begin{cases} \dfrac{x^n(1+|x|)}{|x|} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

이라 할 때, $<f_1(x)>+<f_2(x)>+\cdots+<f_{100}(x)>$의 값을 구하시오.

문항 분석 결과

공교육정상화법의 교과별 적용을 위한 안내 자료(수학) 평가 시 유의사항

(6) 교육과정 밖의 내용은 정규 수업 시간에 지도하였더라도 출제하여 평가할 수 없음

- 정규 수업 시간에 지도한 내용이더라도 교육과정 밖의 내용은 출제할 수 없습니다. 이러한 내용은 문항 내에 단서 조건으로 명확히 제시하여도 출제하여 평가할 수 없습니다.
- 용어와 기호 또한 교육과정의 학습 요소에서 제시한 범위를 벗어나는 내용은 출제하지 않아야 하며 새로운 용어와 기호를 문제에서 정의하고 출제하는 것도 지양해야 합니다.

사례 다음은 위반 사례에 해당함

- $[x]$과 같은 가우스 함수, f_n과 같이 해석학에서 사용하는 함수열의 기호 등 교육과정에서 다루는 범위를 넘어서는 용어와 기호를 문항 내의 조건에서 정의한 뒤 이를 활용하는 문항을 출제하여 평가함.

대학교재 실해석학개론 2판(정동영) p134 '함수열' 정의

4.6.1 정의 D를 실수의 집합 $\mathbb{R}$의 부분집합이라고 하자. 각 자연수 n에 대하여 함수

$$f_n : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

이 정의되어 있을 때, 함수 f_n들을 차례로 나열시킨 것을 D **위에서 정의된 함수열**(sequence of functions defined on D)이라고 한다.

- [문제 6번]에서 새롭게 정의된 **기호** $<f(x)>$**와** $f_n(x)$**와 같은 기호는 교유과정에서 다루는 기호가 아닙니다.** 특히 $f_n(x)$**는 대학교재인 해석학에서 다루는 '함수열' 기호에 해당**합니다. 한국교육과정평가원에서 발표한 '공교육정상화법의 교과별 적용을 위한 안내자료(수학)'에서도 교육과정의 학습요소를 벗어난 기호 표현을 사용하고 나아가 대학교재에서 다루는 기호를 사용하는 것은 교육과정을 준수하지 않는 문항이라고 되어 있습니다. 따라서 [문제 6번]은 교육과정의 수준과 범위를 벗어난 문항으로 판단됩니다.

9. 한양대학교

▶ 한양대학교 ▷ 논술전형 ▷ 문항카드 5 ▷ 자연계열(오전) ▷ [문제1] - 3번

문항 및 제시문 [문제1]-3

1. [문제 1] 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)

<다> $x > 0$에서 정의된 함수 $g(x) = e^{-x}|\cos x|$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(1) $b_1 < 1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $b_{n+1} < b_n$이다.

(2) $b_1 < k < 1$인 모든 실수 k에 대하여 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = k$가 만나는 점의 개수는 1이다.

(3) 모든 자연수 n과 $b_{n+1} < k < b_n$인 모든 실수 k에 대하여 곡선 $y = g(x)$와 직선 $y = k$가 만나는 점의 개수는 $2n+1$이다.

3. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 합을 구하시오.

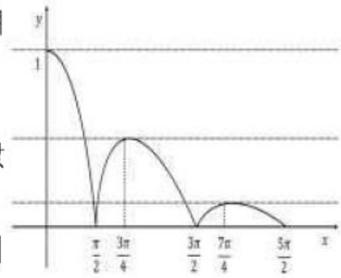
예시 답안 6번

3. 함수 $P(x)$를 $P(x) = e^{-x}\cos x$라 하면 $P'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$의 범위에서 $P'(x) = 0$에 대하여

$\cos x + \sin x = \cos x(1 + \tan x) = 0$이고, $\boxed{\tan x = -1}$이다.

$\boxed{x = \frac{3\pi}{4}}$일 때 $\tan x = -1$이므로 함수 $P(x)$는 $x = \frac{3\pi}{4}$에서 극솟값을 갖고 $P\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$이다. 그러므로 함수 $g(x) = |P(x)|$는 $x = \frac{3\pi}{4}$에서 극댓값을 갖고 $g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$ 이다.



$\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$라 하면, 함수 $g(x) = |P(x)|$는 $\boxed{x = \frac{7\pi}{4}}$에서 극댓값을 갖고

$g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-2\pi} < g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$이므로 $b_1 = g\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$이다.

$\frac{5\pi}{2} < x < \frac{7\pi}{2}$라 하면, 함수 $g(x) = |P(x)|$는 $\boxed{x = \frac{11\pi}{4}}$에서 극댓값을 갖고

$g\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-3\pi} < g\left(\frac{7\pi}{4}\right)$이므로 $b_2 = g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-2\pi}$이다.

함수 $y = \tan x$가 주기 π인 주기함수이므로 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}e^{-\pi}$이고 공비가 $e^{-\pi}$인 등비수열이다. $0 < e^{-\pi} < 1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}} \times \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} = \frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)}$ 이다.

문항 분석 결과

2015 개정 수학과 교육과정 교수 학습 방법 및 유의 사항 삼각함수가 포함된 방정식

- 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 해석하거나 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 간단한 경우만 다루되, 주어진 구간 안에서 해를 구하는 것만 다룬다.

2015 개정 수학과 교육과정 교수 학습 자료 삼각함수가 포함된 방정식

삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 교수·학습 상황에서 매우 어려운 문제로 다루어질 수도 있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서는 학습 부담 및 학습량 감축을 고려하여, 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 해석하거나 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 간단한 것만 다루도록 제한하였다. 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프와 연결 지어 좌변과 우변의 교점 또는 범위를 구하여 풀 수 있도록 하고, 사인법칙과 코사인법칙을 활용하는 문제를 해결하는 과정에서 방정식이나 부등식을 풀어야 하는 경우에 활용될 수 있도록 다룬다. 이때 방정식이나 부등식의 해는 주어진 구간에서의 특수해만 구하도록 한다.

삼각함수가 포함된 방정식(삼각방정식)의 일반해

삼각방정식의 특수해를 β라 하고, n을 임의의 정수라고 하면 삼각방정식의 일반해는 다음과 같다.
(1) $\sin x = a$ $(|a| \leq 1)$의 일반해 : $x = n\pi + (-1)^n \beta$
(2) $\cos x = a$ $(|a| \leq 1)$의 일반해 : $x = 2n\pi + \beta$
(3) $\tan x = a$ $(|a| \leq 1)$의 일반해 : $x = n\pi + \beta$

- **[문제 6번]**의d 예시답안에 삼각함수가 포함된 방정식 $\tan x = -1$을 만족하는 x값을 찾아 수열 b_n의 일반항을 구하고 있습니다. 여기서 구한 x값은 차례대로 $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$, $x = \frac{11\pi}{4}$...입니다. 수열 b_n의 일반항을 구하기 위해서는 $\tan x = -1$을 만족하는 x값을 계속해서 구해야 합니다. 하지만 이러한 해들은 삼각함수가 포함된 방정식 $tnax = -1$의 일반해에 해당합니다. 하지만, 교육과정에서는 **'삼각함수의 일반해'**는 다루지 않습니다.